MMGF11, kortfattade lösningar till tentamen 02/04 2013

1. (a) Lösning: Efter variabelbyte $t = 1/x$ får vi uttrycket

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{3t} - (1+2t)^{3/2}}{t^2}.$$

Efter Taylorutveckling kring $t = 0$ av de inblandade funktionerna får vi att

$$\frac{e^{3t} - (1+2t)^{3/2}}{t^2} = \frac{(9/2)t^2 - (3/2)t^2 + O(t^3)}{t^2},$$

så svaret blir 3.

(b) Lösning: Det karaktäristiska polynomet blir

$$\det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)(5-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 10\lambda + 24$$

vilket har nollställena 4 och 6. Enligt sats är därför egenvärdena 4 och 6.

(c) Lösning: Vi löser den separabla diffekvationen

$$e^y y' = \ln x,$$

och får först den implicita lösningen

$$\int e^y dy = \int \ln x dx,$$

dvs

$$e^y = x \ln x - x + C.$$

Sätter vi in $y(e) = 1$ får vi att $C = e$. För att få en explicit lösning tar vi den naturliga logaritmen på båda sidor och får

$$y = \ln(x \ln x - x + e),$$

och vi noterar slutligen att den är definierad på $(1, \infty)$. Därför är

$$f(x) := \ln(x \ln x - x + e)$$

vår lösning.

(d) Lösning: Enligt sats erhålls minstakvadratlösningen genom att lösa den normala ekvationen $A^T A x = A^T b$. Vi får att

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}, \qquad A^T b = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Vi ser då direkt att minstakvadratlösningen är

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Lösning: Enligt algebrans fundamentalsats kan varje polynom

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

skrivas som

$$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)...(x - \lambda_n)$$

där λ_j är de (komplexa) nollställena räknade med multiplicitet. Då polynomet är reellt så gäller att om $\lambda_j = a_j + ib_j$ är ett nollställe så är även $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$ ett nollställe. Låt nu η_j vara en uppräkning av de $\lambda_j = a_j + ib_j$ sådana att $b_j \geq 0$. Det betyder att gruppen η_j kommer innehålla de reella nollställena samt ett komplext nollställe från varje sådant konjugatpar. För varje j låter vi nu A_j vara den kvadratiska matrisen

$$A_j := \begin{bmatrix} \eta_j \end{bmatrix}$$

om η_j är reellt alternativt

$$A_j := \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix}$$

om $\eta_j = a_j + ib_j$ är ickereellt, dvs $b_j \neq 0$. Låt nu A vara den $n \times n$ matris vi får genom att placera matriserna A_j längs diagonalen och sätta 0 överallt annars,

$$A := \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_k \end{bmatrix}.$$

Vi får då att det karaktäristiska polynomet för A blir produkten av de karaktäristiska polynomen för matriserna A_j, vilket precis blir

$$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)...(x - \lambda_n) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0.$$

Därför är påståendet sant.

(b) Lösning: Om vi låter $x_1 = 1$ och $x_2 = -1$ så får vi $Q(1, -1) = -1$, så Q är ej positivt definit, så därför är påståendet falskt.

(c) Lösning: Låt g_n vara den funktion på $[1/(n+1), 1/n]$ som är 1 i änpunkterna, antar värdet e^n i mitten av intervallet samt är linjär mellan mitten och ändpunkterna. Längden på intervallet $[1/(n+1), 1/n]$ är $1/n(n+1)$ så

$$\int_{1/(n+1)}^{1/n} g_n(x)dx \approx \frac{e^n}{2n(n+1)}.$$

Då e^n växer mycket snabbare än $n(n+1)$ då n går mot oändligheten följer det att integralerna

$$\int_{1/(n+1)}^{1/n} g_n(x)dx$$

går mot oändligheten. Låt nu f vara funktionen som är lika med g_n för jämna n och lika med $1/g_n$ för ojämna n. Man ser enkelt att f är kontinuerlig och positiv och att den generaliserade integralen

$$\int_0^1 f(x)dx$$

divergerar. Men detsamma gäller naturligtvis för $1/f$, så därför är påståendet falskt.

(d) Lösning: Falskt då u eller v skulle kunna vara nollvektorn.

(e) Lösning: Vi noterar att serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{1+k^2}$$

domineras av serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}.$$

Denna är i sin tur konvergent tack vara Cauchys integralkriterium då den generaliserade integralen

$$\int_1^{\infty} x^{-3/2} dx$$

är konvergent. En positiv serie som domineras av en konvergent serie är alltid konverget, så påståendet är sant.

(f) Lösning: Om det funnits en punkt $\eta \in (0,1)$ sådan att $f(\eta) \neq \int_0^1 f(x)dx$ då hade enligt kontinuiteten f ej antagit värdet $\int_0^1 f(x)dx$ i ett litet intervall kring η. Men om vi väljer $0 < a < \eta < b < 1$ så finns enligt Integralkalkylens medelvärdessats en punkt $y \in [a,b]$ sådan att

$$f(y) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

. Detta säger alltså att i varje intervall $[a,b]$ så antar den kontinuerliga funktionen f värdet $\int_0^1 f(x)dx$, dvs f måste vara konstant $\int_0^1 f(x)dx$ på $(0,1)$ och därför konstant på $[0,1]$ p g a kontinuiteten. Påståendet är därför sant.

3. Lösning: Vi skriver om

$$\frac{4x+2}{x^2+4} = 2\left(\frac{2x}{x^2+4}\right) + (1/2)\left(\frac{1}{(x/2)^2+1}\right).$$

En primitiv till

$$2\left(\frac{2x}{x^2+4}\right)$$

är

$$2\ln|x^2+4|,$$

och vi får därför enligt insättningsformeln att

$$\int_0^{\sqrt{3}} 2\left(\frac{2x}{x^2+4}\right) dx = 2\left[\ln|x^2+4|\right]_0^{\sqrt{3}} = 2\ln(7/4).$$

För den andra termen gör vi variabelbytet $t = x/2$. Då $\arctan(t)$ är en primitiv till $1/(t^2+1)$ får vi igen genom insättningsformeln att

$$\int_{x=0}^{\sqrt{3}} (1/2)\left(\frac{1}{(x/2)^2+1}\right) dx = \int_{t=0}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{t^2+1} dt = [\arctan(t)]_0^{\sqrt{3}/2} = \arctan(\sqrt{3}/2).$$

Slutligen får vi då genom additivitet för integraler att

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x+2}{x^2+4}dx = \int_0^{\sqrt{3}} 2\left(\frac{2x}{x^2+4}\right)dx + \int_0^{\sqrt{3}} (1/2)\left(\frac{1}{(x/2)^2+1}\right)dx =$$
$$= 2\ln(7/4) + \arctan(\sqrt{3}/2) \approx 1,833.$$

4. Lösning: Vi börjar med att ta fram en ortogonal bas för $W := \text{Span}\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$. Genom Gram-Schmidts process applicerad på paret $\mathbf{u_1}$ och $\mathbf{u_2}$ får vi

$$\mathbf{v_1} := \mathbf{u_1}, \qquad \mathbf{v_2} = \mathbf{u_2} - \frac{\mathbf{u_2}\cdot\mathbf{v_1}}{|\mathbf{v_1}|^2}\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Eftersom

$$\mathbf{v_3} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

är ortogonal mot både $\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v_2}$ är $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ en ortogonal bas för W. Därför är

$$\text{proj}_W\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v_1}|^2}\mathbf{v_1} + \frac{\mathbf{v_2}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v_2}|^2}\mathbf{v_2} + \frac{\mathbf{v_3}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v_3}|^2}\mathbf{v_3} = (\mathbf{1/3})\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

så

$$\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{W}}\mathbf{v} = (\mathbf{2/3})\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sålunda blir avståndet mellan $\mathbf{v}$ och W

$$|\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{W}}\mathbf{v}| = \frac{\mathbf{2\sqrt{6}}}{\mathbf{3}}.$$

5. Lösning: Via partiell integration har vi att

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C,$$

så som integrerande faktor kan vi välja $e^{xe^x - e^x}$, och vi får då ekvationen

$$(e^{xe^x - e^x}y)' = e^{xe^x - e^x}xe^x.$$

Nu noterar vi att $e^{xe^x - e^x}$ är en primitiv funktion till högerledet, så vi får att

$$e^{xe^x - e^x}y = e^{xe^x - e^x} + C,$$

dvs

$$y = 1 + Ce^{e^x - xe^x}$$

för någon konstant C. Sätter vi in begynnelsevärdesvillkoret $y(0) = 1 + e$ får vi att $C = 1$, så lösningen blir

$$y = 1 + e^{e^x - xe^x}.$$

6. Lösning: Vi skriver systemet som

$$x'(t) = Ax(t)$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Från uppgift 1b har vi att $A : s$ egenvärden är 4 och 6. Genom radreduktion av $A - 4I$ får vi t ex att

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

är en egenvektor med egenvärde 4, medan vi på liknande sätt får att

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

är en egenvektor med egenvärde 6. Enligt sats är då den allmänna lösningen till differentialekvationen given av

$$x(t) = C_1 e^{4t} v_1 + C_2 e^{6t} v_2 = \begin{bmatrix} C_1 e^{4t} + C_2 e^{6t} \\ -C_1 e^{4t} + C_2 e^{6t} \end{bmatrix}.$$

Insättning $t = 0$ ger att $C_1 + C_2 = 1$ och $-C_1 + C_2 = 2$, vilket leder till att $C_1 = -1/2$ medan $C_2 = 3/2$. Därför blir lösningen

$$x_1(t) = -(1/2)e^{4t} + (3/2)e^{6t}, \qquad x_2(t) = (1/2)e^{4t} + (3/2)e^{6t}.$$

7. Lösning: Vi börjar med att hitta alla lösningar till den homogena ekvationen

$$y'' - 3y' = 0.$$

Det karaktäristiska polynomet blir $r^2 - 3r$, vilket har nollställena 0 och 3. Enligt sats är därför den allmänna lösningen till den homogena ekvationen

$$y = C_1 + C_2 e^{3x}.$$

Nu letar vi efter en partikulärlösning. Låt $\mathcal{L}$ beteckna vår linjära differentialoperator, dvs $\mathcal{L}(y) = y'' - 3y'$. Vi letar först efter en partikulärlösning till ekvationen $\mathcal{L}(y) = x$. Vår ansats är $y = Ax^2 + Bx$. Vi får att

$$\mathcal{L}(Ax^2 + Bx) = -6Ax + 2A - 3B,$$

så $A = -1/6$ och $B = -1/9$. Vi letar nu efter en partikulärlösning till ekvationen $\mathcal{L}(y) = \sin x$. Vår ansats är

$$y = A \sin x + B \cos x.$$

Vi får vi att

$$\mathcal{L}(A \sin x + B \cos x) = (-A + 3B) \sin x + (-3A - B) \cos 2x,$$

vilket ger oss ekvationssystemet

$$-A + 3B = 1, -3A - B = 0.$$

Detta har lösningen $A = -1/10$ och $B = 3/10$, så en partikulärlösning ges av

$$y = -(1/10)\sin x + (3/10)\cos x.$$

Tack vare lineariteten är nu

$$y = -(1/6)x^2 - (1/9)x - (1/10)\sin x + (3/10)\cos x$$

en partikulärlösning till vår ursprugliga ekvation $\mathcal{L}(y) = x + \sin x$. Enligt sats är därför den allmänna lösningen till ekvationen denna adderat med den allmänna lösningen till den homogena ekvationen, dvs

$$y = C_1 + C_2 e^{3x} - (1/6)x^2 - (1/9)x - (1/10)\sin x + (3/10)\cos x.$$

8. Lösning: Låt

$$A := \begin{bmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

och definiera

$$x_k := \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix}.$$

Då har vi att för alla $k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} = Ax_k$. Låt

$$v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Från tidigare uppgift har vi sett att v_1 är en egenvektor till A med egenvärde 4 och v_2 är en egenvektor med egenvärde 6. Om $x_0 = cv_1 + dv_2$ får vi att

$$x_k = A^k x_0 = c4^k v_1 + d6^k v_2 = \begin{bmatrix} c4^k + d6^k \\ -c4^k + d6^k \end{bmatrix},$$

så

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{c4^k + d6^k}{-c4^k + d6^k}$$

Då $|a_0| \neq |b_0|$ kan inte d vara noll. Vi kan därför förkorta med $d6^k$ och får

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1 + (c/d)(4/6)^k}{1 - (c/d)(4/6)^k} = 1.$$