Tentamen
Analys och linjär algebra, del 2, MMGF11

131218 kl. 08.30–12.30

Examinator: Iulia Pop, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Anders Martinsson telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: Chalmers godkänd miniräknare

Betygsgränserna är följande: Godkänd (12 poäng), Välgodkänd (18 poäng). För att få maximalt poäng krävs kompletta detaljerade lösningar. Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast första vardagen efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV Expeditionen.

---

1. (i) Diagonalisera matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(ii) Lös följande system av differentialekvationer (1p)

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) + 4x_2(t) \end{aligned}$$

med begynnelsevillkoren $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$.

2. Avgör om matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar. (2p)

3. Låt W vara underrummet till $\mathbb{R}^4$ som ges av ekvationerna

$$x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0,$$

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 0.$$

(i) Bestäm en bas för W och ortogonalisera den. (2p)

(ii) Bestäm vektorn i W som har minsta avstånd till vektorn $(3, 1, -5, 1)$ och beräkna också detta avstånd. (2p)

4. Låt A vara en $m \times n$ matris och B en $n \times p$ matris. Visa att $rang(AB) \leq rang(A)$ och $rang(AB) \leq rang(B)$. (4p)

5. Beräkna följande integraler: (3p)

$$(a) \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} dx, \quad (b) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x+1}{x^4 + x^2} dx, \quad (c) \int_0^{\pi/2} \sin(2x) e^{\sin x} dx.$$

6. Lös följande differentialekvationer:

(a) $xy' = 2x \ln x - y$, $y(1) = 0$. (1p)

(b) $xy' = y + y^2$, $y(1) = 2$. (1p)

(c) $y'' + y' - 2y = (1 - 3x)e^{-2x}$, $y(0) = y'(0) = 1$. (2p)

VÄND!

7. (i) Avgör om följande generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta: (1p)

$$(a) \int_1^\infty \frac{2+\sin x}{1+x^2}dx, \ (b) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^5}}.$$

(ii) Beräkna volymen av den oändligt långa kropp som uppkommer då kurvan (2p)

$$y = \frac{e^{1/x}}{x}, \quad x \geq 1$$

roterar kring x-axeln.

8. (i) Finn Maclaurinutvecklingen av ordning 2 för $f(x) = e^{3x}(x-1)$. (1p)

(ii) Beräkna gränsvärdet (1p)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x((1+x)^{1/3} - e^{x/3})}.$$

Några standard Maclaurinutvecklingar:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x),$$

där B betecknar en funktion som är begränsad i en omgivning av origo och som beror av n.

Lycka till!
Iulia Pop