# Lösningar till tentamen i Analys och linjär algebra del 2, MMGF11

## 131218

(1) (i) $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)+2 = \lambda^2-5\lambda+6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$

Egenvärdena är alltså $\lambda_1=2,\ \lambda_2=3$.

$\lambda_1=2:\ \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1+2x_2=0 \Leftrightarrow x_1=-2t,\ x_2=t \Rightarrow t\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ egenvektorer.

$\lambda_2=3:\ \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1+x_2=0 \Leftrightarrow x_1=-t,\ x_2=t \Rightarrow t\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\boxed{A=PDP^{-1},\quad P=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}$$

(ii) $\begin{cases} x_1' = x_1-2x_2 \\ x_2' = x_1+4x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = PDP^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Lösningen är $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C_1e^{2t}\bar{v}_1 + C_2e^{3t}\bar{v}_2 = C_1e^{2t}\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2e^{3t}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x_1(0)=1,\ x_2(0)=1 \Rightarrow \begin{cases} -2C_1-C_2=1 \\ C_1+C_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=-2 \\ C_2=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = 4e^{2t}-3e^{3t} \\ x_2 = -2e^{2t}+3e^{3t} \end{cases}}$

(2). $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & -4 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & \lambda-1 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & -4 & -3-\lambda \end{vmatrix}$

$= (\lambda-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)\left((\lambda-3)(\lambda+1)+4\right) = -(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+1) = -(\lambda-1)^3$.

Egenvärdena är $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$.

Motsvarande egenrum: $\begin{bmatrix} 2 & -4 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x_1+2x_2+2x_3=0$ plan i $\mathbb{R}^3$, 2-dim.

Eftersom $\lambda=1$ är trippelrot men motsvarande egenrum 2-dim $\Rightarrow$ A ej diagonaliserbar.

<u>Obs</u>: Man kan också observera att om A vore diagonaliserbar, $A=PDP^{-1}$ då är $D=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}=I \Rightarrow A=PIP^{-1}=I$, absurd!

(3). $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3+x_4=0 & \Rightarrow x_1=-3(2t-s)+5t-s=-t+2s \\ x_2-2x_3+x_4=0 & \Rightarrow x_2=2t-s \\ x_3=t \\ x_4=s \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t+2s \\ 2t-s \\ t \\ s \end{bmatrix}$

$t,s\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad W = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ; $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ är en bas för $W$.

(linjärt oberoende och spänner upp $W$).

$\qquad \qquad \parallel \qquad \quad \parallel$

$\qquad \qquad \bar{u}_1 \qquad \quad \bar{u}_2$

Man ortogonaliserar denna bas med Gram-Schmidt proceduren:

$$\bar{v}_1 = \bar{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \frac{\bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1}{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1} \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-4}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Låt $\bar{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \text{proj}_W \bar{y} = \frac{\bar{y} \cdot \bar{v}_1}{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1} \bar{v}_1 + \frac{\bar{y} \cdot \bar{v}_2}{\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_2} \bar{v}_2 = \frac{-6}{6} \bar{v}_1 + \frac{2}{\frac{10}{3}} \bar{v}_2 =$

$$= \begin{bmatrix} 9/5 \\ -9/5 \\ -3/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}.$$

avståndet $= \| \bar{y} - \text{proj}_W \bar{y} \| = \left\| \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9/5 \\ -9/5 \\ -3/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 6/5 \\ 14/5 \\ -22/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{720}}{5}$

(4). Observera att $\text{Null}(B) \subseteq \text{Null}(AB)$ ty om $B\bar{x} = \bar{0}$ då blir $AB\bar{x} = A\bar{0} = \bar{0}$. Vi får att $\dim \text{Null}(B) \le \dim \text{Null}(AB)$.

Å andra sidan är $\text{rang}\, B + \dim \text{Null}(B) = p \Rightarrow \text{rang}\, B = p - \dim \text{Null}(B)$

och $\text{rang}(AB) + \dim \text{Null}(AB) = p \Rightarrow \text{rang}(AB) = p - \dim \text{Null}(AB)$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\underline{\text{rang}\, B \ge \text{rang}\,(AB)}$. (*)

För att få den andra olikheten, $\text{rang}(AB) = \text{rang}\left((AB)^T\right) =$

$= \text{rang}\,(B^T A^T) \le \text{rang}\,(A^T) = \text{rang}\,(A)$.

enligt olikheten (*) tillämpad för matriserna $B^T, A^T$

Då har vi bevisat att $\underline{\text{rang}\,(AB) \le \text{rang}\, A}$.

(5). (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x\,dx}{\cos^2 x} \overset{\text{P.I.}}{=} \left[x \tan x\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan x\,dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx =$

$$= \frac{\pi}{4} + \left[\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2}$$

(b) $\displaystyle \frac{x+1}{x^4+x^2} = \frac{x+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \iff$

$\iff x+1 = Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)x^2 \iff (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + B = x+1$

$\Rightarrow A = 1,\ B = 1,\ C = -1,\ D = -1.$

$$\begin{cases} A+C = 0 \\ B+D = 0 \\ A = 1,\ B = 1. \end{cases}$$

$$\int_1^{\sqrt3} \frac{x+1}{x^4+x^2}\,dx = \int_1^{\sqrt3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{x+1}{x^2+1}\right)dx = \left[\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x\right]_1^{\sqrt3}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1 - \frac{1}{\sqrt3} - \frac{\pi}{12}}.$$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cdot \sin(2x)\,dx = \int_0^{\pi/2} 2\sin x\cos x\, e^{\sin x}\,dx$

$$\left.\begin{array}{l} \sin x = t \Rightarrow \cos x\,dx = dt \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\pi/2 \Rightarrow t=1 \end{array}\right\} \Rightarrow I = 2\int_0^1 e^t\cdot t\,dt \overset{P.I.}{=}$$

$$= 2\left(\left[te^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t\,dt\right) = 2(e-e+1) = \boxed{2}.$$

⑥. (a) $xy' = 2x\ln x - y \Leftrightarrow xy'+y = 2x\ln x \Leftrightarrow (xy)' = 2x\ln x \Rightarrow$

$\Rightarrow xy = \int 2x\ln x\,dx \overset{P.I.}{=} x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y = x\ln x - \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$

$y(1)=0 \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y = x\ln x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}}.$

(b) $xy' = y+y^2 \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y+y^2} = \int\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right)dy = \int\frac{dx}{x}$

$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = \ln|x| + C \Leftrightarrow \left|\frac{y}{y+1}\right| = Dx, \quad D>0.$

$y(1) = 2 \Rightarrow D = \frac{2}{3}$. Eftesom $y(1)>2>0 \Rightarrow y(x)>0$ i en omgivning av 1

$\Rightarrow \frac{y}{y+1} = \frac{2}{3}x \Rightarrow \boxed{y = \frac{2x}{3-2x}}$

(c) Den karakteristiska ekvationen är $r^2+r-2=0 \Rightarrow r_1=-2,\ r_2=1$

$\Rightarrow$ den allmänna homogena lösningen är $y_h = C_1e^{-2x} + C_2e^x$.

För att hitta en partikulär lösning låt oss göra variabelbytet

$y_p = ze^{-2x} \Rightarrow y_p' = (z'-2z)e^{-2x},\quad y_p'' = (z''-4z'+4z)e^{-2x}$.

Insättning i ekvationen ger: $z''-4z'+4z + z'-2z-2z = 1-3x$

$\Leftrightarrow z''-3z' = 1-3x$. Vi söker $z_p = x(ax+b) = ax^2+bx$.

$z_p' = 2ax+b,\quad z_p'' = 2a \Rightarrow 2a-3(2ax+b) = 1-3x \Rightarrow \begin{cases} 2a-3b=1 \\ -6a=-3\end{cases}$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2},\ b=0 \Rightarrow z_p = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y_p = \frac{1}{2}x^2e^{-2x}$

Då får vi $y = y_h + y_p = C_1e^{-2x} + C_2e^x + \frac{1}{2}x^2e^{-2x}$.

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=1 \Rightarrow C_1+C_2=1 \\ y' = -2C_1e^{-2x} + C_2e^x + (x-x^2)e^{-2x}\ ;\ y'(0)=1 \Rightarrow -2C_1+C_2=1\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_2=1 \\ C_1=0\end{array}$$

Svar: $\boxed{y = e^{x} + \frac{1}{2}x^2 e^{-2x}}$.

7 (i) $0 < \frac{1}{1+x^2} \le \frac{2+\sin x}{1+x^2} \le \frac{3}{1+x^2}$ ty $\sin x \in [-1,1]$

Eftersom $\int_1^{\infty} \frac{3}{1+x^2}\,dx = \left[3\arctan x\right]_1^{\infty} = 3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4} < \infty$,

ger jämförelsekriteriet att $\int_1^{\infty} \frac{2+\sin x}{1+x^2}\,dx$ också konvergent.

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^5}}$ konvergent eftersom $\frac{1}{\sqrt{x+x^5}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ och $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ konvergent.

(ii) Den sökta volymen ges av

$$V = \int_1^{\infty} \pi (f(x))^2\,dx = \int_1^{\infty} \frac{\pi e^{2/x}}{x^2}\,dx = \pi \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{e^{2/x}}{x^2}\,dx$$

$$= \pi \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{2}e^{2/x}\right]_1^{t} = -\frac{\pi}{2} \lim_{t\to\infty}\left(e^{2/t} - e^2\right) = -\frac{\pi}{2}(1-e^2) = \boxed{\frac{\pi(e^2-1)}{2}}$$

8. (i) $e^{3x} = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2} + \dots$

$$e^{3x}(x-1) = \left(1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + \dots\right)(x-1) = x - 1 + 3x^2 - 3x - \frac{9x^2}{2} + x^3 \cdot B(x)$$

$$= -1 - 2x - \frac{3}{2}x^2 + x^3 B(x)$$, $B(x)$ begränsad nära origo.

(ii)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x\left((1+x)^{1/3} - e^{x/3}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3} + x^5 B_1(x)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + x^5 B_2(x)\right)}{x\left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{x^2}{9} + x^3 B_3 - 1 - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{18} - x^3 B_4\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) + x^5\left(B_1(x) - B_2(x)\right)}{x^3\left(-\frac{1}{9} - \frac{1}{18}\right) + x^4\left(B_3(x) - B_4(x)\right)} = \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{1}{6}} = 1$$

(här använder man att $B_1, B_2, B_3, B_4$ begränsade nära origo, så att

$\lim_{x\to 0} x^2\left(B_1(x) - B_2(x)\right) = 0$ $\lim_{x\to 0} x\left(B_3(x) - B_4(x)\right) = 0$).