Tentamen
Analys och linjär algebra, del 2, MMGF11

140422 kl. 08.30–12.30

Examinator: Iulia Pop, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Emil Gustavsson telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: Chalmers godkänd miniräknare

Betygsgränserna är följande: Godkänd (12 poäng), Välgodkänd (18 poäng). För att få maximalt poäng krävs kompletta detaljerade lösningar. Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast första vardagen efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 11-13, MV Expeditionen.

---

1. Genom att använda diagonalisering, lös följande system av differentialekvationer (4p)

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_2'(t) &= 2x_1(t) + x_2(t) \end{aligned}$$

med begynnelsevillkoren $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$.

2. Låt A vara matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(i) Bestäm en ortogonal bas för nollrummet för A. (2p)

(ii) Bestäm den vektor i nollrummet för A som har minsta avstånd till $\mathbf{v} = (0, 1, 1, 0)$. Beräkna också detta minimala avstånd. (2p)

3. Låt $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildningen med standardmatrisen (3p)

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Visa att F är en spegling i någon linje genom origo och hitta denna linje.

4. En student löser ett icke-homogent linjärt system med 10 ekvationer och 12 obekanta och hittar 3 fria variabler. Om högerleden ändras, är det säkert att det nya systemet är lösbart? Motivera noggrant! (2p)

5. Beräkna följande integraler: (3p)

$$\int_1^2 \frac{x^2+4}{x^3+2x}dx$$

$$\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x}+3}dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)dx.$$

VÄND!

6. Lös följande differentialekvationer:

(i) $(1+x^2)y' + xy = xy^2$, $y(0) = 0.5$. (2p)

(ii) $xy' + 2y = 3x\ln x$, $y(1) = 1$. (2p)

(iii) $y'' + 3y' - 4y = 5x^2e^x$. (2p)

7. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då området mellan kurvorna $y = \sqrt{2-x^2}$ och $y = x^2$ roterar kring x-axeln. (2p)

8. Beräkna gränsvärdet (1p)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - \cos(2x)}{x\ln(1+x)}.$$

Några standard Maclaurinutvecklingar:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x),$$

där B betecknar en funktion som är begränsad i en omgivning av origo och som beror av n.

Lycka till!
Iulia Pop