Lösningar till Tentamen 140422

Analys och linjär algebra

① Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Vi diagonaliserar A. Först, egenvärdena och motsvarande egenvektorer: $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$.

$\lambda_1 = 4$: $A\bar{x} = 4\bar{x} \Leftrightarrow (A-4I)\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = 2t \end{cases} \Rightarrow t\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$. egenrummet.

$\lambda_2 = -1$: $A\bar{x} = -\bar{x} \Leftrightarrow (A+I)\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \end{cases} \Rightarrow t\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

Lösningen till ekv. $\bar{x}' = A\bar{x}$ där $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ ges av formeln (via $A = PDP^{-1}$ och variabelbyte)

$$\boxed{\bar{x}(t) = C_1 e^{4t}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}.$$

För $t = 0 \Rightarrow C_1\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 - C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{5}\quad C_2 = -\frac{3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x}(t) = \frac{1}{5} e^{4t}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{3}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_1(t) = \frac{3}{5}e^{4t} - \frac{3}{5}e^{-t} \\ x_2(t) = \frac{2}{5}e^{4t} + \frac{3}{5}e^{-t} \end{cases}}$

② $A \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $A\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 = t,\ x_4 = s \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = t+s \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} t+s \\ t+s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Nul(A) har alltså bas $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 2 \neq 0$.

Gram-Schmidt metoden ger:

$\bar{u}_1 = \bar{v}_1 \quad \bar{u}_2 = \bar{v}_2 - \frac{\bar{v}_2\cdot\bar{u}_1}{\bar{u}_1\cdot\bar{u}_1}\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

En <u>ortogonal bas</u> är alltså: $\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ och } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}}$ (eller $\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$).

$\text{proj}_{Nul(A)}\bar{v} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{u}_1}{\bar{u}_1\cdot\bar{u}_1}\bar{u}_1 + \frac{\bar{v}\cdot\bar{u}_2}{\bar{u}_2\cdot\bar{u}_2}\bar{u}_2 = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \boxed{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}}$

$\|\bar{v} - \text{proj}_{Nul(A)}\bar{v}\| = \left\|\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}\right\| = \left\|\begin{bmatrix} -3/5 \\ 2/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{5}\sqrt{9+4+1+1} = \boxed{\frac{\sqrt{15}}{5}}$

③ Egenvärdena till A är givna av $\det(A-\lambda I) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}-\lambda\right)\left(-\frac{3}{5}-\lambda\right) - \frac{16}{25} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$.

$\lambda = 1$ har motsvarande egenrummet $-2x_1 + 4x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2x_2$, en linje.

$\lambda = -1$ har egenrummet $8x_1 + 4x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -2x_1$, normal till linjen $x_1 = 2x_2$. Detta visar att <u>F är speglingen i linjen $x_1 = 2x_2$.</u>

(4). Enligt rangsatsen är $\dim Nul(A) + \dim Col(A) = 12$ (A är en 10×12 matris).
Eftersom $\dim Nul(A) =$ antalet fria variabler $= 3$, vi får att
$\dim Col(A) = 12-3 = 9$. Men $Col(A)$ är ett underrum till $\mathbb{R}^{10}$. Alltså är
$Col(A)$ ett 9-dim underrum till $\mathbb{R}^{10}$ och det finns då vektorer $\bar{b} \in \mathbb{R}^{10}$
som inte ligger i $Col(A)$. För sådana $\bar{b}$ är systemet $A\bar{x} = \bar{b}$ ej lösbart!

(5). i) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+4}{x^3+2x}\,dx = \int_1^2 \frac{x^2+4}{x(x^2+2)}\,dx$

$$\frac{x^2+4}{x(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2} \iff A(x^2+2) + x(Bx+C) = x^2+4 \iff (A+B)x^2 + Cx + 2A = x^2+4$$

$$\iff A+B = 1,\ 2A = 4,\ C = 0 \implies B = -1,\ A = 2,\ C = 0$$

$$\int_1^2 \frac{x^2+4}{x^3+2x}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{x^2+2}\right) dx = \left[2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+2)\right]_1^2 =$$

$$= \left(2\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 6\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\ln 3\right) = \frac{3}{2}\ln 2.$$

ii) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x}+3}\,dx$; $\left[\begin{array}{l} e^x = t \implies e^x dx = dt \\ x = \ln 3 \implies t = 3 \\ x = 0 \implies t = 1 \end{array}\right] \implies \displaystyle\int_1^3 \frac{dt}{t^2+3} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^3 =$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan(\sqrt{3}) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$$

iii) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x\cos(2x)\,dx = \left[\frac{x\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/4} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sin(2x)\,dx =$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{\pi-2}{8}.$$

(6). (i) $(1+x^2)y' + xy = xy^2 \iff (1+x^2)y' = x(y^2-y) \iff \dfrac{dy}{y^2-y} = \dfrac{x\,dx}{1+x^2}$

$$\implies \int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{x\,dx}{1+x^2} \iff \int\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right) dy = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \implies$$

$$\implies \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \iff \left|\frac{y-1}{y}\right| = e^C\sqrt{1+x^2} = D\sqrt{1+x^2},\ D > 0.$$

$y(0) = \frac{1}{2} \implies D = 1$ och $y(x) < 1$ (nära 0) $\implies \dfrac{1-y}{y} = \sqrt{1+x^2} \iff$

$$\iff y\left(\sqrt{1+x^2}+1\right) = 1 \implies \boxed{y = \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}}.$$

(ii) $xy' + 2y = 3x\ln x \iff y' + \frac{2}{x}y = 3\ln x.$

$\int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln|x| + C$; $e^{2\ln|x|} = e^{\ln(x^2)} = x^2$ integrerande faktorn.

Vi har (efter multiplikation med x^2): $(x^2y)' = 3x^2\ln x \Rightarrow x^2y = \int 3x^2\ln x\,dx$

$= x^3\ln x - \int x^2\,dx = x^3\ln x - \frac{x^3}{3} + C \Rightarrow y = x\ln x - \frac{x}{3} + \frac{C}{x^2}$

$y(1) = 1 \Rightarrow C - \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow C = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{y = x\ln x - \frac{x}{3} + \frac{4}{3x^2}}$

(7). Skärningspunkterna mellan parabeln och halva cirkeln ges av:

$x^2 = \sqrt{2-x^2} \Rightarrow x^4 = 2 - x^2 \iff (x^2-1)\underbrace{(x^2+2)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$\Rightarrow$ skärningspunkterna är $(-1,1)$ och $(1,1)$.

Den sökta volymen är $V = \int_{-1}^{1} \pi(2-x^2) - \int_{-1}^{1} \pi x^4\,dx = \pi\left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} =$

$= \boxed{\frac{44\pi}{15}}.$

(8). $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - \cos(2x)}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} \dots\right) - \left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} \dots\right)}{x\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots\right)} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x^4 B_1(x)}{x^2 + x^3 B_2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x^2 \cdot B_1(x)}{1 + x \cdot B_2(x)} = \boxed{1}$. ($B_1, B_2$ begränsade nära 0).

(6) (iii) Lösningen till den homogena ekvationen $y'' + 3y' - 4y = 0$.

$r^2 + 3r - 4 = 0 \iff r = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \Rightarrow r_1 = -4, r_2 = 1.$ Vi får

$\boxed{y_h = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x}$

Man letar efter en partikulär lösning. Sätt $y_p = ze^x$.

$y_p' = z'e^x + ze^x = e^x(z' + z)$; $y_p'' = e^x(z'+z) + e^x(z''+z') = e^x(z'' + 2z' + z)$

Insättning i ekvationen $y'' + 3y' - 4y = 5x^2e^x$ ger följande:

$e^x(z'' + 2z' + z) + 3e^x(z' + z) - 4ze^x = 5x^2e^x \iff z'' + 5z' = 5x^2$

Man kan leta efter $z_p = ax^3 + bx^2 + cx$. Vi har $z_p' = 3ax^2 + 2bx + c$,

$z_p'' = 6ax + 2b$. Insättning i ekvationen ger

$(6a + 10b)x + 15ax^2 + (2b + 5c) = 5x^2 \Rightarrow \begin{cases} 15a = 5 \\ 6a + 10b = 0 \\ 2b + 5c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/3 \\ b = -1/5 \\ c = 2/25 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{y_p = e^x\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{25}x\right)}.$

Lösningen till den ursprungliga ekv. är $\boxed{y = y_p + y_h = e^x\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{25}x + C_2\right) + C_1 e^{-4x}}$