Tentamen
Analys och linjär algebra, del 2, MMGF11

140828 kl. 14.00–18.00

Examinator: Iulia Pop, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: doktorand, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: Chalmers godkänd miniräknare

Betygsgränserna är följande: Godkänd (12 poäng), Välgodkänd (18 poäng). För att få maximalt poäng krävs kompletta detaljerade lösningar. Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast första vardagen efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9–13, MV Expeditionen.

---

1. Låt W vara det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

(i) Bestäm en bas för W och ortogonalisera den. (2p)

(ii) Bestäm vektorn i W som har minsta avstånd till $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och beräkna också detta avstånd. (2p)

2. (i) Hitta alla värden på a sådana att följande matris är diagonaliserbar: (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

(ii) Bestäm för eventuella sådana a gränsvärdet av A^n då $n \to \infty$. (2p)

3. Låt F vara den linjära avbildning på $\mathbb{R}^3$ vars standardmatris är (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Beräkna matrisen för F relativt basen $e_1' = e_2 - e_3$, $e_2' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_3' = -e_1 + e_2$.

4. (i) Kan ett linjärt homogent system med 10 ekvationer och 12 obekanta ha endast en frivariabel? Motivera! (1p)

(ii) Antag att ett linjärt homogent system med 5 ekvationer och 6 obekanta har endast en frivariabel. Är det säkert att motsvarande icke-homogent system är lösbart för alla möjliga högerled? Motivera! (1p)

5. Beräkna följande integraler: (4p)

$$\int_0^1 \ln(2 + x^2)dx,$$

$$\int_3^5 \frac{3x - 1}{x^2 + x - 6}dx.$$

6. Lös följande differentialekvationer:

(i) $(1+x)y' + y^2 = 3y$, $y(0) = 1$. (2p)

(ii) $(1+x^2)y' - 2xy = x\sqrt{1+x^2}$, $y(0) = 1$. (2p)

(iii) $y'' - y = xe^{-x}$. (2p)

7. (i) Bestäm volymen av den kropp som uppstår då området i första kvadranten som begränsas av kurvan $y = \sqrt{\cos(\sin x)\cos x}$ samt de båda koordinataxlarna roterar kring x-axeln. (2p)

(ii) Beräkna gränsvärdet (1p)

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^{x^2} - x}{\sin x - \arctan x}.$$

Några standard Maclaurinutvecklingar:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x),$$

där B betecknar en funktion som är begränsad i en omgivning av origo och som beror av n.

Lycka till!
Iulia Pop