Lösningar till Tentamen i Analys och linjär algebra del 2, MMGF11, 140828

① (i) Gausseliminering ger $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

pivotkolonnerna är $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. En bas för W är alltså $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$.

Gram-Schmidt proceduren ger:

$\bar{v}_1' = \bar{v}_1$

$\bar{v}_2' = \bar{v}_2 - \dfrac{\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1'}{\bar{v}_1' \cdot \bar{v}_1'}\, \bar{v}_1' = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \dfrac{6}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{En ortogonal bas: } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$.

(ii) Vektorn som har minsta avstånd till $\bar{v}$ är $\text{proj}_W \bar{v}$. Projektionsformeln ger följande: $\text{proj}_W \bar{v} = \dfrac{\bar{v} \cdot \bar{v}_1'}{\bar{v}_1' \cdot \bar{v}_1'}\, \bar{v}_1' + \dfrac{\bar{v} \cdot \bar{v}_2'}{\bar{v}_2' \cdot \bar{v}_2'}\, \bar{v}_2' = \dfrac{1}{3}\, \bar{v}_1' + \dfrac{3}{3}\, \bar{v}_2' =$

$= \dfrac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \\ 4/3 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

avståndet $(\bar{v}, W) = \| \bar{v} - \text{proj}_W \bar{v} \| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \dfrac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\| =$

$= \dfrac{1}{3} \sqrt{4 + 1 + (-1)^2} = \boxed{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$.

② (i) Egenvärdena till A är $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ eftersom A är triangulär. Matrisen är diagonaliserbar omm egenrummet motsvarande $\lambda = 1$ är 2-dim (man behöver inte kolla egenvärdet $\frac{1}{2}$ eftersom motsvarande egenrum är säkert 1-dim).

$A - I = \begin{bmatrix} 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a x_2 = 0$. Om $a \neq 0$,

$x_2 = 0 \Rightarrow \bar{x} = (x_1, 0, 0)$ och x_1 frivariabel $\Rightarrow$ egenrummet är 1-dim. Därför måste $\boxed{a = 0}$ och då får vi

Då blir A ej diagonaliserbar.

$x_1 = t,\ x_2 = s \Rightarrow$ egenrummet är $\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

$A - \frac{1}{2} I = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} x_1 + 2x_3 = 0 \\ \frac{1}{2} x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = t \\ x_2 = -6t \\ x_1 = -4t \end{cases} \Rightarrow t \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$ egenrum till $\frac{1}{2}$.

(ii) $A = PDP^{-1}$ där $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$\Downarrow$

$A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^n} \end{bmatrix} P^{-1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} A^n = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ 6 \quad 4 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\lim_{n\to\infty} A^n = P \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3). Basbytematrisen $P_B = P_{\mathcal{E}\leftarrow B} = [\bar{e}_1' \ \bar{e}_2' \ \bar{e}_3'] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Vi har: $A = P_B [T]_B P_B^{-1} \Rightarrow [T]_B = P_B^{-1} A P_B$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] +$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] + \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow P_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & -3 \\ -1 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

(4). (i) Systemet har matrisen A av typ 10×12.
$\dim \mathrm{Nul}(A) + \dim \mathrm{Col}(A) = 12$. Men $\dim \mathrm{Nul}(A) =$ antalet friavariabler $= 1$
$\Rightarrow \dim \mathrm{Col}(A) = 11$. Men $\mathrm{Col}(A)$ underrum till $\mathbb{R}^{10} \Rightarrow \dim \mathrm{Col}(A) \le 10$.
Vi får en motsägelse!

(ii) Systemet har matrisen A av typ 5×6.
$\dim \mathrm{Col}(A) = 6 - \dim \mathrm{Nul}(A) = 5 \Rightarrow \mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^5 \Rightarrow$ kolonnerna spänner upp $\mathbb{R}^5 \Rightarrow \forall\, \bar{b} \in \mathbb{R}^5$ är en linjär kombination av kolonnerna till A $\Leftrightarrow$ ekv. $A\bar{x} = \bar{b}$ lösbar för alla $\bar{b} \in \mathbb{R}^5$.

(5). $$\int_0^1 \ln(2+x^2)\,dx = \left[x\ln(2+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{2x}{2+x^2}\,dx = \ln 3 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+2}\,dx =$$
$$= \ln 3 - \int_0^1 \left(2 - \frac{4}{x^2+2}\right) dx = \ln 3 - 2 + 4\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2} = \ln 3 - 2 +$$
$$+ \left[\frac{4}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1 = \ln 3 - 2 + \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} = \ln 3 - 2 + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

$$\int_3^5 \frac{3x-1}{x^2+x-6}\,dx = \int_3^5 \frac{3x-1}{(x+3)(x-2)}\,dx$$

$$\frac{3x-1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} \Leftrightarrow A(x-2) + B(x+3) = 3x-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A+B)x + (3B-2A) = 3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} A+B = 3 \\ 3B-2A = -1 \end{cases} \Leftrightarrow A = 2,\ B = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_3^5 \frac{3x-1}{x^2+x-6}\,dx = \int_3^5 \left(\frac{2}{x+3}+\frac{1}{x-2}\right)dx = \Big[2\ln|x+3| + \ln|x-2|\Big]_3^5 =$$

$$= 2\ln 8 + \ln 3 - 2\ln 6 = 6\ln 2 + \ln 3 - 2(\ln 2 + \ln 3) = 4\ln 2 - \ln 3.$$

6. (i) $(1+x)y' + y^2 = 3y \Leftrightarrow (1+x)y' = 3y - y^2 \Leftrightarrow \frac{y'}{3y-y^2} = \frac{1}{1+x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{3y-y^2} = \int \frac{dx}{1+x} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y(3-y)} = \ln|1+x| + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{3}\left(\frac{dy}{y} + \frac{dy}{3-y}\right) = \ln(1+x) + C \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\ln|y| - \ln|y-3|\right) = \ln(1+x) + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\ln\left|\frac{y}{y-3}\right| = \ln(1+x) + C \Leftrightarrow \left|\frac{y}{y-3}\right| = (1+x)^3 \cdot D,\ D>0.$$

$y(0)=1 \Rightarrow D = \frac{1}{2}$. Eftersom $\begin{cases} y(x)>0 \text{ nära } 0 \\ y(x)<3 \end{cases} \Rightarrow \left|\frac{y}{y-3}\right| = \frac{y}{3-y} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{y}{3-y} = \frac{1}{2}(1+x)^3 \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{3(1+x)^3}{2+(1+x)^3}}$$

(ii) $(1+x^2)y' - 2xy = x\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow y' - \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$.

$e^{\int -\frac{2x}{1+x^2}dx} = e^{-\ln(1+x^2)} = \left(e^{\ln(1+x^2)}\right)^{-1} = \frac{1}{1+x^2}$. Den integrerande faktorn är alltså $\frac{1}{1+x^2}$. Multiplikation med den ger:

$$\frac{y'}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}y = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{y}{1+x^2}\right)' = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{1+x^2} = \int \frac{x\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^2}dx = \int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{1+x^2} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C \Rightarrow y = -\sqrt{1+x^2} + C(1+x^2).$$

Om $y(0)=1 \Rightarrow C=2 \Rightarrow \boxed{y = -\sqrt{1+x^2} + 2(1+x^2)}$.

(iii) Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1$.
Lösningarna till den homogena ekvationen $y'' - y = 0$ är:

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Sätt $y_p = ze^{-x} \Rightarrow y_p' = z'e^{-x} - ze^{-x} = (z'-z)e^{-x} \Rightarrow$

$y_p'' = (z''-z')e^{-x} - (z'-z)e^{-x} = (z''-2z'+z)e^{-x}$. Insättning i ekv.

$y''-y = xe^{-x}$ ger $(z''-2z'+z)e^{-x} - ze^{-x} = xe^{-x} \Leftrightarrow z''-2z' = x.$

Vi letar efter $z_p = ax^2+bx$. Vi har $z_p' = 2ax+b$, $z_p'' = 2a$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2a - 2(2ax+b) = x \iff -4ax + 2a-2b = x \Rightarrow \begin{cases} -4a = 1 \\ 2a-2b=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow z_p = -\frac{1}{4}(x^2+x) \Rightarrow y_p = -\frac{1}{4}(x^2+x)e^{-x}$ är en partikulär lösning.

Alla lösningar till $y''-y = xe^{-x}$ ges av

$$y = y_h + y_p = \boxed{C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{1}{4}(x^2+x)e^{-x}} = C_1e^x + \left(C_2 - \frac{1}{4}(x^2+x)\right)e^{-x}.$$

7. (i) $y=0 \iff \cos(\sin x)\cos x = 0 \iff \cos(\sin x)=0$ eller $\cos x = 0$

$\cos(\sin x) = 0 \iff \sin x = \frac{(2n+1)\pi}{2}$, omöjligt eftersom $\sin x \in [-1,1]$.

$\cos x = 0 \iff x = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ och eftersom $x \in [0,\frac{\pi}{2}] \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$.

Volymen ges av:

$$V = \pi\int_0^{\pi/2}\left(\sqrt{\cos(\sin x)\cos x}\right)^2 dx = \pi\int_0^{\pi/2}\cos(\sin x)\cos x\, dx$$

Variabelbyte: $\left.\begin{array}{l} \sin x = t \Rightarrow \cos x\, dx = dt \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=1 \end{array}\right\} \Rightarrow V = \pi\int_0^1 \cos t\, dt =$

$= \left[\pi \sin t\right]_0^1 = \pi\sin 1.$

Alltså är $\boxed{V = \pi\sin 1}$.

(ii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{x^2}-x}{\sin x - \arctan x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots\right)-x}{\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^5\cdot B_1(x)}{\frac{1}{6}x^3+x^5\cdot B_2(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2B_1(x)}{\frac{1}{6}+x^2B_2(x)} = \boxed{6}.$$ (B_1, B_2 begränsade nära origo).