

Tentamen i MMGF11, 17/12 2014, 8.30-12.30
Matematiska Vetenskaper, Göteborgs universitet
Elin Götmark (070-6787423)

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng. Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.

1. Låt $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara avbildningen som speglar vektorer i linjen $x = y$.
 - (a) Bestäm egenvektorerna och egenvärdena till avbildningens standardmatris A . (2p)
 - (b) Diagonalisera A . (1p)
2. Ange en ortonormalbas till kolonrummet av matrisen A , om (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.
 - (a) Alla diagonaliserbara matriser är inverterbara. (1p)
 - (b) Om W är ett underrum till vektorrummet V och $\mathbf{y} \in W$ så är $\text{proj}_W \mathbf{y} = \mathbf{y}$. (1p)
 - (c) Det finns en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sådan att nollrummet till avbildningens matris är $\{\mathbf{0}\}$. (1p)
4. Två fysiker vill mäta tyngdkraftskonstanten g på kemigården på Chalmers. För att göra det har de byggt ett 12 meter högt torn av drickabackar från vilket de släpper en kula och mäter hur lång tid det tar innan den når marken. Efter att ha upprepat experimentet 6 gånger får de följande tider:

1.17
1.12
1.18
1.17
0.98
0.96

- a) Använd formeln $s = gt^2$ och minsta kvadratmetoden för att uppskatta g . (2p)
- b) En av fysikerna tycker att de lika gärna kan uppskatta g som medelvärde av s/t^2 för alla observationerna. Får de samma svar? Varför/varför inte? (1p)

5. Lös följande differentialekvationer:

a) $y' + y = \sin(e^x)$ (1p)

b) $y'' - y' = xe^x$ där $y(0) = 2$ och $y'(0) = 1$. (2p)

6. a) Bestäm den obestämda integralen (2p)

$$\int \frac{x+1}{x+x^3} dx.$$

b) Låt A vara området som har grafen till $y = 4x - x^2$ som sin övre gräns och x -axeln som sin undre gräns. Räkna ut volymen av rotationskroppen som uppstår när A roterar kring x -axeln. (2p)

7. Är den generaliserade integralen (3p)

$$\int_0^\pi \tan(x) dx$$

konvergent eller divergent? Räkna ut dess värde om den är konvergent.

8. Gör en uppskattning av $1/\sqrt{e}$ med tre korrekta decimaler genom att Maclaurinutveckla e^x . (3p)