Lösningar till tentamen i MMGF11

17/12 – 2014

1. a) Alla vektorer v som uppfyller att $Av = \lambda v$ för något reellt tal λ är en egenvektor till A. En vektor v kan bara speglas till en konstant gånger sig själv om den antingen är någon konstant gånger $(1,1)$; då speglas den till sig själv, eller om den är en konstant gånger $(1,-1)$, som speglas till vektorn $(-1,1)$ (rita en bild!). Vektorn $v_1 = (1,1)$ speglas till sig själv, dvs. $Av_1 = v_1$ så $\lambda_1 = 1$, och för vektorn $v_2 = (1,-1)$ är $Av_2 = -v_2$ dvs. $\lambda_2 = -1$.

   b) Vektorerna v_1 och v_2 är ortogonala, så diagonaliseringen av matrisen A ges av

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1\cdot(-1) - 1\cdot 1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Vi ska bestämma en bas för rummet som spänns av vektorerna $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (-2,3,4,0)$, $v_3 = (2,0,2,0)$ och $v_4 = (0,1,2,-1)$.

   Som första basvektor väljer vi vektorn

$$b_1 = v_1 = (1,0,1,0).$$

   Med hjälp av Gramm-Schmidt och vektorn v_2 får vi en vektor som är vinkelrät mot b_1;

$$b_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} \cdot b_1 = (-2,3,4,0) - \frac{2}{2} \cdot (1,0,1,0) = (-3,3,3,0).$$

   Eftersom att $v_3 = 2v_1$ så gäller att $v_3 \in Span\{b_1, b_2\}$, så vi applicerar inte Gramm-Schmidt på v_3, utan använder istället v_4 direkt, dvs. vi sätter

$$b_3 = v_4 - \frac{v_4 \cdot b_1}{b_2 \cdot b_1} \cdot b_1 - \frac{v_4 \cdot b_2}{b_2 \cdot b_2} \cdot b_2 = (0,1,2,-1) - \frac{2}{2} \cdot (1,0,1,0) - \frac{9}{27} \cdot (-3,3,3,0) = (0,0,0,-1).$$

   Vektorerna b_1, b_2 och b_3 bildar en ortogonalbas för kolonnrummet till matrisen A. Vi normaliserar dem och får då vektorerna

$$\begin{cases} \bar{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0) \\ \bar{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1,0) \\ \bar{b}_3 = (0,0,0,1) \end{cases}$$

3. a) Falskt. Matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ är exempelvis diagonaliserbar men inte inverterbar.

b) Sant. Let $\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_n$ vara en ortogonalbas till W. Eftersom att $\mathbf{y} \in W$ så kan vi anta att $\mathbf{b_1} = \mathbf{y}$. Eftersom att $\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_n$ vara en ortogonalbas till W så är

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_i = \begin{cases} 0 & \text{om } i \neq 1 \\ 1 & \text{om } i = 1 \end{cases}$$

Vi får därför att

$$\text{proj}_W \mathbf{y} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{b_1}}{\mathbf{b_1} \cdot \mathbf{b_1}} \cdot \mathbf{b_1} + \ldots + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{b_n}}{\mathbf{b_n} \cdot \mathbf{b_n}} \cdot \mathbf{b_n} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{b_1}}{\mathbf{b_1} \cdot \mathbf{b_1}} \cdot \mathbf{b_1} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}}{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}} \cdot \mathbf{y} = 1 \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y}$$

c) Falskt. Enligt rangsatsen så är $\dim(Im(T)) + \dim(Nul(T)) = 5$. Eftersom att $\dim(Im(T)) \leq \dim(\mathbf{R}^3) = 3$ så får vi att $\dim(Nul(T)) \geq 2$, dvs. vi kan inte ha $Nul(T) = \{\mathbf{0}\}$ då $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$.

4. a) Låt A innehålla tiderna i experimenten i kvadrat, dvs. sätt

$$A = \begin{bmatrix} 1.17^2 \\ 1.12^2 \\ 1.18^2 \\ 1.17^2 \\ 0.98^2 \\ 0.96^2 \end{bmatrix}$$

och låt $\mathbf{b} = (12, 12, 12, 12, 12, 12)^T$ och $\mathbf{x} = g$. Vi vill hitta minstakvadratlösningen $\hat{x}$ till problemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Enligt formeln i Lay uppfyller $\hat{x}$

$$A^T A \hat{x} = A^T \mathbf{b}.$$

Här är

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1.17^2 & 1.12^2 & 1.18^2 & 1.17^2 & 0.98^2 & 0.96^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.17^2 \\ 1.12^2 \\ 1.18^2 \\ 1.17^2 \\ 0.98^2 \\ 0.96^2 \end{bmatrix} = 9.0318$$

och

$$A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1.17^2 & 1.12^2 & 1.18^2 & 1.17^2 & 0.98^2 & 0.96^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} = 87.1992,$$

så vi får att

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} = \frac{87.1992}{9.0318} = 9.6547$$

b) Låt $t_1, t_2, \ldots t_6$ vara de observerade tiderna. Medelvärdet av s/t^2 för alla observationer blir

$$\frac{12/t_1^2 + 12/t_2^2 + \ldots + 12/t_6^2}{6} = 10.2054$$

I termer av $t_1, \ldots, t_6$ så räknar vi i (a)-uppgiften ut

$$\frac{12t_1^2 + \ldots 12t_6^2}{t_1^4 + \ldots t_6^4} = 12 \cdot$$

vilket är ett helt annat uttryck än medelvärdet av $12/t_i^2$ för de olika observationerna.

5. a) Vi använder den integrerande faktorn e^x:

$$y' + y = \sin e^x \Leftrightarrow e^x y' + e^x y = e^x \sin e^x \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}(e^x y(x)) = e^x \sin e^x$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{\partial}{\partial x}(e^x y(x))\, dx = \int e^x \sin e^x\, dx \Leftrightarrow e^x y(x) = \int e^x \sin e^x\, dx.$$

Sätt $t = e^x$. Då blir $dt = e^x\, dx$, så vi får

$$e^x y(x) = \int e^x \sin(e^x)\, dx = \int \sin t\, dt = -\cos t + C = -\cos e^x + C$$

för någon konstant $C \in \mathbb{R}$. Om vi nu dividerar båda sidorna med e^x får vi att

$$y(x) = \frac{C - \cos e^x}{e^x}.$$

b) Lösningsmetod 1: Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - r = 0$, så $r_1 = 0$ och $r_2 = 1$. Lösningen till den homogena ekvationen är då $y_h = C_1 + C_2 e^x$. För att hitta partikulärlösningen sätter vi $y_p(x) = z(x)e^x$. Då är

$$y_p' = e^x(z + z') \qquad y_p'' = e^x(z'' + 2z + z),$$

och sätter vi in detta i ekvationen får vi

$$e^x(z'' + 2z' + z) - e^x(z + z') = e^x(z'' + z') = xe^x.$$

Division med e^x ger $z'' + z' = x$. Vi ansätter $z = x(Ax + B)$, vilket ger $z' = 2Ax + B$ och $z'' = 2A$. Insättning ger $2Ax + B + 2A = x$, alltså $2A = 1$ och $2A + B = 0$, dvs $A = 1/2$ och $B = -1$. Vi har då $z = x^2/2 - x$ och $y_p = e^x(x^2/2 - x)$. Den allmänna lösningen till den ursprungliga differentialekvationen är alltså

$$y = y_h + y_p = C_1 + C_2 e^x + e^x(x^2/2 - x) = C_1 + e^x(x^2/2 - x + C_2).$$

Derivering ger

$$y' = e^x(x^2/2 - x + C_2 + x - 1),$$

och insättning av begynnelsevillkor ger

$$y(0) = C_1 + C_2 = 2 \qquad y'(0) = C_2 - 1 = 1.$$

Den andra ekvationen ger $C_2 = 2$, och då ger den första $C_1 = 0$. Lösningen är alltså

$$y = e^x(x^2/2 - x + 2).$$

Lösningsmetod 2: Vi kan använda integrerande faktor även i den här uppgiften, men den här gången med funktionen e^{-x}:

$$y'' - y' = xe^x \Leftrightarrow e^{-x}y'' - e^{-x}y' = e^{-x} \cdot xe^x \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x}y'(x)\right) = x$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x}y'(x)\right)\, dx = \int x\, dx \Leftrightarrow e^{-x}y'(x) = \frac{x^2}{2} + C$$

för någon konstant $C \in \mathbb{R}$. Om vi multiplicerar båda sidorna med e^x får vi att

$$y'(x) = \frac{x^2 e^x}{2} + Ce^x.$$

Eftersom att vi vet att $y'(0) = 1$ ser vi direkt att vi måste ha att $C = 1$, dvs.

$$y'(x) = \frac{x^2 e^x}{2} + e^x.$$

Om vi integrerar uttrycket ovan får vi fram funktionen $y(x)$:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int \frac{x^2 e^x}{2} + e^x \, dx = \int \frac{x^2 e^x}{2} \, dx + \int e^x \, dx = \int \frac{x^2 e^x}{2} \, dx + e^x + D \\ &= \frac{x^2 e^x}{2} - \int xe^x \, dx + e^x + D = \frac{x^2 e^x}{2} - \left(xe^x - \int e^x \, dx \right) + e^x + D \\ &= \frac{x^2 e^x}{2} - (xe^x - e^x) + e^x + D = \left(x^2/2 - x + 2\right) e^x + D. \end{aligned}$$

Eftersom att $y(0) = 2$ ser vi att $D = 0$, så vi får

$$y(x) = \left(x^2/2 - x + 2\right) e^x.$$

6. a)

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x+x^3} \, dx &= \int \frac{x+1}{x(1+x^2)} \, dx = \int \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{1+x^2} \, dx \\ &= \int \frac{A(1+x^2) + (Bx+C)x}{x(1+x^2)} \, dx = \int \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(1+x^2)} \, dx \end{aligned}$$

för några konstanter A, B och C som uppfyller ekvationerna

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 1 \\ A = 1 \end{cases}$$

Vi ser direkt att vi måste ha $A = 1$, $B = -1$ och $C = 1$, så vi får att

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x+x^3} \, dx &= \int \frac{1}{x} + \frac{-x+1}{1+x^2} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx + \int \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx + \arctan x = \ln|x| - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + \arctan x + C. \end{aligned}$$

b) Grafen till funktionen $y = 4x - x^2 = x(4-x)$ skär x-axeln i punkterna 0 och 4. Volymen blir därför

$$\begin{aligned} \int_0^4 \pi y^2 \, dx &= \int_0^4 \pi \big(x(4-x)\big)^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^4 16x^2 - 8x^3 + x^4 \, dx = \pi \left[\frac{16x^3}{3} - \frac{8x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_0^4 \\ &= \pi \left(\frac{16 \cdot 4^3}{3} - \frac{8 \cdot 4^4}{4} + \frac{4^5}{5} \right) = \frac{2^9 \pi}{15} \end{aligned}$$

7. Funktionen $\tan x$ går mot ∞ då $x \to \pi/2$, så vi skriver därför om integralen som

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{\pi/2-\epsilon} \tan x\, dx + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\pi/2+\epsilon}^{\pi} \tan x\, dx.$$

Integralen $\int_0^\pi \tan x\, dx$ existerar om båda dessa integraler existerar. Vi tittar först på den första av dessa två integraler, där $\tan x$ är positiv:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2-\epsilon} \tan x\, dx &= \int_0^{\pi/2-\epsilon} \frac{\sin x}{\cos x}\, dx \\ &= [-\log(\cos x)]_0^{\pi/2-\epsilon} \\ &= -\log(\cos(\pi/2-\epsilon)) + \log(\cos 0) \to \infty\end{aligned}$$

när $\epsilon \to 0$. Den första av våra integraler är divergent och då är den ursprungliga integralen också det.

8. Maclaurinutvecklingen av e^x av ordning n ges av $f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^2}{n!}$ och feltermen $B_{n+1}(x)$ ges av $e^{\theta x}x^{n+1}/(n+1!)$ för något $\theta \in (0,1]$. Observera att $1/\sqrt{e} = e^{-1/2}$. I punkten $x = -1/2$ har vi

$$|B_{n+1}(x)| \leq \frac{e^{-\theta/2}}{2^{n+1}\cdot(n+1)!} \leq \frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}$$

Vi kan nu räkna ut $f_n(-1/2)$ och den övre begränsningen ovan blir för några olika n:

n	$f_n(-1/2)$	Övre begränsning av felet	Felets tecken	Minsta möjliga antal korrekta decimaler
0	1.00000	0.50000	-	0
1	0.50000	0.12500	+	0
2	0.62500	0.02083	-	1
3	0.60417	0.00260	+	2
4	0.60678	0.00026042	-	3
5	0.60651	0.000021701	+	4

Från tabellen ser vi att $f_4(-1/2) = 0.60678$ är en approximation av $1/\sqrt{e} = e^{-1/2}$ med tre korrekta decimaler.