

Tentamen i MMGF11, 14/4 2015, 8.30-12.30  
Matematiska Vetenskaper, Göteborgs universitet  
Elin Götmark (070-6787423)

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng. Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.

1. Låt  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vara ortogonalprojektion på planet  $x + y + z = 0$ .
  - (a) Skriv upp egenvärden och egenvektorer till avbildningen. (1,5p)
  - (b) Bestäm avbildningens standardmatris  $A$ . (1,5p)
2. Ange baser till kolonnrummet och nollrummet till matrisen  $A$ , om (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & 2 \\ 3 & -6 & 6 & -6 \end{bmatrix}.$$

3. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.
  - (a) Låt  $H$  vara ett underrum till  $\mathbb{R}^n$ . Om  $\mathbf{x} \in H$  och  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  så är  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in H$ . (1p)
  - (b) Egenvärdena till en matris kan avläsas på matrisens diagonal. (1p)
  - (c) Om avståndet mellan  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  är detsamma som avståndet mellan  $\mathbf{u}$  och  $-\mathbf{v}$ , så är  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  ortogonala. (1p)
4. Bestäm lösningen  $\mathbf{x}(t)$  till systemet av differentialekvationer

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_2'(t) &= 4x_1(t) + 2x_2(t), \end{aligned}$$

$$\text{där } \mathbf{x}(0) = (2, 5). \quad (3p)$$

5. Lös följande differentialekvationer:
  - a)  $y' = y/\sqrt{x+1}$  där  $y(0) = 1$ , (1,5p)
  - b)  $x^2 y' + y = 1$ . (1,5p)
6. a) Bestäm den obestämda integralen (2p)

$$\int x^2 \sin(x) dx.$$

- b) Är den generaliserade integralen (2p)

$$\int_0^\infty \frac{x}{(1+2x^2)^{3/2}} dx.$$

konvergent eller divergent? Räkna ut dess värde om den är konvergent.

7. Använd MacLaurins formel för att visa olikheten  $|\sqrt{1+x}-1-x/2| \leq x^2/8$  om  $0 \leq x \leq 1$ . (3p)
8. Beräkna arean som ligger till höger om parabeln  $x = y^2 - 12$  och till vänster om linjen  $y = x$ . (3p)