Lösningar till tentamen i MMGF11, 14/4 2014, 8.30-12.30
Matematiska Vetenskaper, Göteborgs universitet
Elin Götmark (070-6787423)
Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng. Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.

1. (a) Alla vektorer som ligger i planet som ges av ekvationen är egenvektorer med egenvärde 1, och två ortogonala sådana vektorer ges av $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0)$ och $\mathbf{v}_2 = (1, 1, -2)$. Alla vektorer som är vinkelräta mot planet är också egenvektorer med egenvärdet 0 eftersom att dessa avbildas på origo, dvs. vi kan sätta $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)$.

   (b) Vi använder (a)-uppgiften för att hitta matrisen A för avbildningen T:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Alternativ lösning: De två egenvektorerna i (a)-uppgiften är en ortogonalbas för planet. För att ta reda på matrisen A för T så beräknar vi projektionen av enhetsvektorerna på planet:

$$\frac{e_1 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{e_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\,\mathbf{v}_1 + \frac{1}{6}\,\mathbf{v}_2 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{e_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{e_2 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = \frac{-1}{2}\,\mathbf{v}_1 + \frac{1}{6}\,\mathbf{v}_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

   och

$$\frac{e_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{e_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = \frac{-2}{6}\,\mathbf{v}_2 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

   Detta ger att

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.

$$
\begin{aligned}
A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & 2 \\ 3 & -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Eftersom att vi har pivotelement i den första och tredje kolumnen i A ges en bas till kolonnrummet av den första repsektive tredje kolumnen i A, dvs. av $(3, 2, 3)$ och $(9, 7, 6)$.

Om vi radreducerar en gång till ovan så ser vi att

$$
A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Detta ger att varje vektor (x_1, x_2, x_3, x_4) i nollrummet måste uppfylla

$$
\begin{cases} x_1 = 2x_2 + 6x_4 \\ x_3 = -2x_4 \end{cases}
$$

från vilket vi ser att en bas ges av de två vektorerna $(2, 1, 0, 0)$ och $(6, 0, -2, 1)$.

3. (a) Falskt. Exempel: $n = 2$, $H = Span((1,0))$, $x = (1,0)$ och $y = (0,1)$.

   (b) Falskt. Matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ har exempelvis egenvärdena 1 och -1.

   (c) Sant.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u} - \mathbf{v}| = |\mathbf{u} - (-\mathbf{v})| &\Leftrightarrow |\mathbf{u} - \mathbf{v}| = |\mathbf{u} + \mathbf{v}| \\
&\Leftrightarrow |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 \\
&\Leftrightarrow (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\
&\Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\
&\Leftrightarrow 4\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0
\end{aligned}$$

4. Sätt $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Då är

$$
\begin{aligned}
|A - \lambda I| &= \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)(2-\lambda) - 3 \cdot 4 \\
&= \lambda^2 - 3\lambda - 10 = (\lambda - (-2))\,(\lambda - 5)
\end{aligned}
$$

dvs. vi får de två egenvärdena $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_2 = 5$.

$$
A - \lambda_1 I \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = (1, -1)
$$

och

$$
A - \lambda_2 I \sim \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = (3, 4).
$$

Detta ger att alla llösningar till vårt system går att skriva på formen

$$
\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 = c_1 e^{-2t}(1, -1) + c_2 e^{5t}(3, 4).
$$

För att hitta c_1 och c_2 använder vi bivillkoret $\mathbf{x}(0) = (2, 5)$ som ger ekvationssystemet

$$
\begin{cases} c_1 + 3c_2 = 2 \\ -c_1 + 4c_2 = 5. \end{cases}
$$

Det är ett vanligt linjärt ekvationssystem som vi kan lösa. Om vi gör det så får vi $c_1 = -1$ och $c_2 = 1$, varför en lösning ges av

$$
\mathbf{x}(t) = -e^{-2t}\,(1, -1) + e^{5t}\,(3, 4).
$$

5. a) Vi använder variabelseparation:

$$\begin{aligned} y' = y/\sqrt{x+1} &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y/\sqrt{x+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{x+1}} \\ &\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}} \\ &\Leftrightarrow \ln|y| = 2\sqrt{x+1} + C \\ &\Leftrightarrow |y| = \exp(2\sqrt{x+1} + C). \end{aligned}$$

Bivillkoret $y(0) = 1$ implicerar att $|y(0)| = 1$, så $C = -2$, dvs.

$$|y| = \exp(2\sqrt{x+1} - 2).$$

b) Vi använder integrerande faktor:

$$\begin{aligned} x^2y' + y = 1 &\Leftrightarrow y' + x^{-2}y = x^{-2} \\ &\Leftrightarrow e^{-1/x}y' + x^{-2}e^{-1/x}y = x^{-2}e^{-1/x} \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dx}e^{-1/x}y = x^{-2}e^{-1/x} \\ &\Leftrightarrow e^{-1/x}y = \int x^{-2}e^{-1/x}\,dx. \end{aligned}$$

Om vi gör variabelbytet $y = -1/x$ får vi att $dy = x^{-2}dx$ och att

$$\int x^{-2}e^{-1/x}\,dx = \int e^y\,dy = e^y = e^{-1/x} + C.$$

Om vi sätter in det i vår tidigare ekvation då har vi alltså visat att

$$e^{-1/x}y = \int x^{-2}e^{-1/x}\,dx = e^{-1/x} + C \Leftrightarrow y = 1 + Ce^{1/x}$$

6. a)

$$\begin{aligned}\int x^2\sin(x)\,dx &= x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)dx\\ &= -x^2\cos x + \int 2x\cos x dx\\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x - \int 2\sin x dx\\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C\end{aligned}$$

b) Integralen

$$\int_0^\infty \frac{x}{(1+2x^2)^{3/2}}\,dx.$$

är bara generaliserad i oändlligheten.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x}{(1+2x^2)^{3/2}}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{x}{(1+2x^2)^{3/2}}\,dx = \left[2x^2 = y,\ 4x\,dx = dy\right]\\ = \frac{1}{4}\lim_{N\to\infty}\int_0^{2N^2}\frac{1}{(1+y)^{3/2}}\,dy = \frac{1}{4}\lim_{N\to\infty}\left[\frac{-2}{(1+y)^{1/2}}\right]_0^{2N^2}\\ = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

dvs. integralen är konvergent och har värdet 1/2.

7. Sätt $f(x) = \sqrt{1+x}$. Enligt Maclaurins formel är

$$f(x) = f(0) + f'(0) + f''(\theta x) \cdot \frac{x^2}{2} = 1 + x/2 + \frac{-1}{4(1+\theta x)^{3/2}} \cdot \frac{x^2}{2}$$

för alla $x \in [-1, 1]$ och något $\theta \in [0, 1]$ som beror på x.

Detta är ekvivalent med att

$$\sqrt{1+x} - 1 - x/2 = \frac{-1}{4(1+\theta x)^{3/2}} \cdot \frac{x^2}{2}$$

vilket ger att

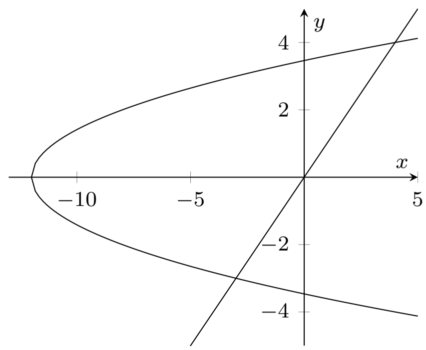
$$\left|\sqrt{1+x} - 1 - x/2\right| \leq \left|\frac{-1}{4(1+\theta x)^{3/2}} \cdot \frac{x^2}{2}\right| = \frac{1}{|1+\theta x|^{3/2}} \cdot x^2/8$$

Om $x \in [0, 1]$ så är det första faktorn i värsta fall 1, vilket ger att

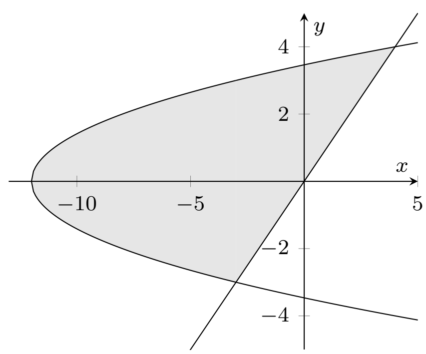
$$\left|\sqrt{1+x} - 1 - x/2\right| \leq x^2/8.$$

8. Beräkna arean som ligger till höger om parabeln $x = y^2 - 12$ och till vänster om linjen $y = x$. (3p)

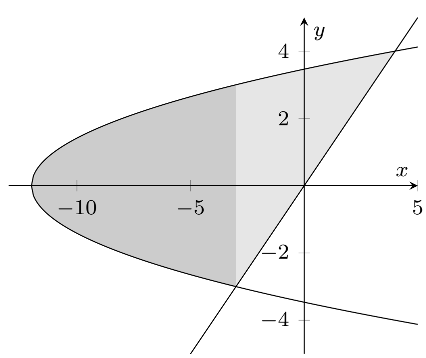
Vi börjar med att skissa de två kurvorna:



Vi ska alltså beräkna arean av följande område:



För att räkna ut arean delar vi upp området i två delar:



För att kunna räkna ut integralen behöver vi nu ta reda på skärningspunkterna mellan kurvorna. För att hitta x-koordinaterna för de punkterna löser vi ekvationen $x = x^2 - 12$ och får de två lösningarna $x = -2$ och $x = 4$. Arean ges därför av

$$\begin{aligned}
\int_{-12}^{-3} \sqrt{x+12} - (-\sqrt{x+12})\,dx + \int_{-3}^{4} \sqrt{x+12} - x\,dx \\
= \int_{-12}^{-3} 2\sqrt{x+12}\,dx + \int_{-3}^{4} \sqrt{x+12} - x\,dx \\
= \left[2 \cdot \frac{2}{3} \cdot (x+12)^{3/2}\right]_{-12}^{-3} + \left[\frac{2}{3} \cdot (x+12)^{3/2} - x^2/2\right]_{-3}^{4} \\
= \frac{343}{6}
\end{aligned}$$