

Tentamen i MMGF11, 27/8 2014, 14.00-18.00  
Matematiska Vetenskaper, Göteborgs universitet  
Elin Götmark (070-6787423)

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng. Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.

1. Låt  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -2, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 3, 2)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (2, 1, -7, -2)$  och  $\mathbf{v}_4 = (2, -1, 0, 0)$ . Bestäm en ortogonalbas för  $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ . Bestäm också det minsta avståndet från  $\mathbf{v}_1$  till  $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ . (3p)
2. Hitta minsta kvadrat-lösningen till problemet  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  om  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  och  $\mathbf{b} = (3, -1, 5)$ . Räkna också ut minsta-kvadrat felet. (3p)
3. Låt  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ .
  - a) Hitta egenvärden och egenvektorer till matrisen  $A$ . (2p)
  - b) Diagonalisera matrisen  $A$ , eller förklara varför det inte går. (1p)
4. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.
  - a) Matrisen  $A^T A$  symmetrisk för alla matriser  $A$ . (1p)
  - b) Det finns ingen  $4 \times 7$ -matris sådan att  $\dim(\text{Nul}(A)) = \dim(\text{Col}(A))$ . (1p)
  - c) Om 0 är ett egenvärde till matrisen  $A$  så är  $\dim(\text{Nul } A) > 0$ . (1p)
5. Lös följande differentialekvationer:
  - a)  $y'' - 2y' + y = \sin(x)$  (1,5p)
  - b)  $y' + x^2 y' = y$  där  $y(0) = -1$ . (1,5p)
6. a) Bestäm den obestämda integralen (2p)

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

- b) Låt  $A$  vara området mellan grafen till  $y = x^2$  och  $x$ -axeln för  $0 \leq x \leq 1$ . Räkna ut volymen av rotationskroppen som uppstår när  $A$  roterar kring  $y$ -axeln. (2p)

Var god vänd!

7. Är den generaliserade integralen (3p)

$$\int_0^1 x \ln(x) dx$$

konvergent eller divergent? Räkna ut dess värde om den är konvergent.

8. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{(1 - \cos(2x))^2}$$

med hjälp av MacLaurinutveckling. (3p)