Lösningar Tenta MMGF11

27/8 2015 Elin Götmark

(1.) Vi använder Gram-Schmidts metod.

Vår nya ortogonala bas har $\mathbb{b}_1 = \mathbb{v}_1$ som första vektor. Vi får

$$\mathbb{v}_2 - \frac{\mathbb{b}_1 \cdot \mathbb{v}_2}{\mathbb{b}_1 \cdot \mathbb{b}_1} \cdot \mathbb{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{-6}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix},$$

så vi kan välja $\mathbb{b}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}$

Nu vill vi hitta $\mathbb{b}_3$:

$$\mathbb{v}_3 - \frac{\mathbb{b}_1 \cdot \mathbb{v}_3}{\mathbb{b}_1 \cdot \mathbb{b}_1} \cdot \mathbb{b}_1 - \frac{\mathbb{b}_2 \cdot \mathbb{v}_3}{\mathbb{b}_2 \cdot \mathbb{b}_2} \cdot \mathbb{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{16}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-34}{170}\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{5}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{16}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Detta betyder att $\mathbb{v}_3 \in \text{Span}\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2\}$.

Vi använder istället $\mathbb{v}_4$ för att hitta $\mathbb{b}_3$:

$$\mathbb{v}_4 - \frac{\mathbb{b}_1 \cdot \mathbb{v}_4}{\mathbb{b}_1 \cdot \mathbb{b}_1}\mathbb{b}_1 - \frac{\mathbb{b}_2 \cdot \mathbb{v}_4}{\mathbb{b}_2 \cdot \mathbb{b}_2}\mathbb{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{17}{170}\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{10}{10}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{4}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{10}$$

så vi kan sätta $\mathbb{b}_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$.

Då bildar $\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_3$ en OG-bas för $\text{Span}\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3, \mathbb{v}_4\}$

Avståndet mellan v_1 och Span$\{v_1, v_2, v_3\}$ är noll eftersom v_1 ligger i Span$\{v_1, v_2, v_3\}$.

2. Minstakvadratlösningen ges av lösningen till $A^T A \hat{x} = A^T b$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 24 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Felet:

$$A\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$\|A\hat{x} - b\| = \left\| \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Minstakvadratfelet är alltså $\sqrt{2}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 24 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0,5 \end{array}\right]$$

Så minstakvadratlösningen är $\hat{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0,5 \end{bmatrix}$

3. a. Vi räknar ut egenvärdena:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2(4-\lambda) = 0$$

$\Rightarrow$ egenvärdena är $\lambda_1 = 5$ och $\lambda_2 = 4$.

Vi hittar egenvektorer till $\lambda_1 = 5$:

$$\begin{bmatrix} 4-5 & 0 & -2 \\ 2 & 5-5 & 4 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi kan välja $v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Vi hittar nu egenvektorn till $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{bmatrix} 4-4 & 0 & -2 \\ 2 & 5-4 & 4 \\ 0 & 0 & 5-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi kan välja $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

b.) $A = PDP^{-1}$, där $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. a.) Sant. En matris B är symmetrisk om $B^T = B$, och $(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$.

b.) Sant. Vi vet att $\dim(\mathrm{Nul}(A)) + \dim(\mathrm{Col}(A)) = 7$ enligt rangsatsen, så deras grader kan inte vara lika eftersom 7 är udda.

c.) Sant. Om 0 är ett egenvärde finns minst en vektor x så att $Ax = 0$. Denna vektor ligger då i nollrummet, så nollrummet är inte tomt, och $\dim(\mathrm{Nul}(A)) \geq 1$.

5. a.) Vi hittar först den homogena lösningen. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - 2r + 1 = 0$, som har lösningarna $r = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$.

Då är $y_h = e^x(C_1 x + C_2)$ den allmänna lösningen till $y'' - 2y' + y = 0$.

Vi hittar nu en partikulärlösning.

Sätt $y_p = A\cos(x) + B\sin(x)$. Då är

$y_p' = -A\sin(x) + B\cos(x)$ och

$y_p'' = -A\cos(x) - B\sin(x)$.

Då är $VL = y_p'' - 2y_p' + y_p = \cos(x)(-A - 2B + A) +$

$+ \sin(x)(-B + 2A + B) = -2B\cos(x) + 2A\sin(x) =$

$= \sin(x) = HL$.

Så $A = \frac{1}{2}$ och $B = 0$, och $y = y_h + y_p =$

$= e^x(C_1 x + C_2) + \frac{1}{2}\sin(x)$

b. $y' + x^2 y' = y \iff \frac{dy}{dx}(1 + x^2) = y \iff$

$\iff \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x^2} \iff \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$\iff \ln|y| = \arctan(x) + C.$

$y(0) = -1$ ger $\ln|-1| = \ln|1| = 0 = \arctan(0) + C = C$,

dvs $C = 0$. Så $\ln|y| = \arctan(x) \iff |y| = e^{\arctan(x)}$,

$\iff y = \pm e^{\arctan(x)}$. Eftersom $y(0) = -1$ ska vi välja $y = -e^{\arctan(x)}$

6. a. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \end{array} \right\} =$

$= 2\int e^t\,dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$

b. Alt 1: Vi använder skalformeln:

Volymen $= 2\pi\int_0^1 x f(x)\,dx = 2\pi\int_0^1 x^3\,dx = 2\pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$

$= \frac{\pi}{2}$

Alt 2: Vi använder skivformeln kring y-axeln:

$$y = x^2 \iff x = \sqrt{y} = g(y) \qquad \begin{array}{l} x = 0 \iff y = 0 \\ x = 1 \iff y = 1 \end{array}$$

$$\pi \int_0^1 g(y)^2\,dy = \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2\,dy = \pi \int_0^1 y\,dy = \pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

7. $$\int_0^1 \overset{\uparrow}{x} \underset{\downarrow}{\ln(x)}\,dx = \left\{\begin{array}{l}\text{partiell} \\ \text{integration}\end{array}\right\} = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_0^1$$

$$- \int_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{x^2\ln(x)}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1^2\cdot\ln(1)}{2} - \lim_{t\to 0}\frac{t^2\ln(t)}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 =$$

$$= 0 - 0 - \left(\frac{1}{4} - 0\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

Integralen är alltså konvergent.

8. $$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + B_1(x)\cdot x^4,$$ så

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + B_2(x)\cdot x^4 = 1 - 2x^2 + B_2(x)x^4,$$

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + B_3(x)x^8.$$ Alltså är

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{(1-\cos(2x))^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^4}{2}+B_3(x)x^8\right)}{\left(1-\left(1-2x^2+B_2(x)x^4\right)\right)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{2} - B_3(x)x^8}{4x^4 + B_4(x)x^6} = \lim_{x\to 0}\frac{1/2 - B_3(x)x^4}{4 + B_4(x)x^2} = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$