Matematiska vetenskaper
Göteborgs universitet
Thomas Bäckdahl

Datum: 2015-12-21 Tid: 08:30-12:30
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Thomas Bäckdahl Tel.: 0703-088304

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 2.

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng.

1. Lös med hjälp av diagonalisering följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = & 5x_1(t) & + 6x_2(t) \\ x_2'(t) = & -3x_1(t) & -4x_2(t) \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$. **(3p)**

2. Låt $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Bestäm en ortogonal bas för $W = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ och bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{u}$ på W. **(3p)**

3. Avgör ifall den kvadratiska formen $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$ är positivt definit eller inte. **(3p)**

4. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.

   a) Egenvärdena till en triangulär matris avläses på matrisens diagonal. **(1p)**

   b) Om A och B är kvadratiska matriser så är $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$. **(1p)**

   c) Matrisen
   $$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 9 & -1 \end{bmatrix}$$
   är diagonaliserbar. **(1p)**

   d) Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara godtyckliga nollskillda vektorer. Då är $\|\operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}\| = \|\operatorname{Proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}\|$. **(1p)**

5. a) Lös differentialekvationen $y' = y^2 \sin(x)$ där $y(0) = 1/2$. **(2p)**

   b) Lös differentialekvationen $y'' = y' + 2y + xe^x$. **(3p)**

6. Bestäm den primitiva funktionen
$$\int x \arctan(x) dx.$$
(2p)

7. Området $A = \{0 \leq y \leq e^{-2x}, 0 \leq x < \infty\}$ roteras kring x-axeln. Blir volymen av rotationskroppen ändlig, och i så fall hur stor? **(2p)**

8. Beräkna gränsvärdet
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x \arctan(x)}$$
med hjälp av MacLaurinutveckling. **(3p)**

Vänd

Några standard MacLaurin utvecklingar:

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}) \\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1})
\end{aligned}
$$