Matematiska vetenskaper Göteborgs universitet Thomas Bäckdahl

Datum: 2015-12-21 Tid: 08:30-12:30
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Thomas Bäckdahl Tel.: 0703-088304

Lösningsförslag till tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 2.

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng.

1. Med $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ och $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ blir systemet $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$.
Diagonalisera A. Karakteristiska polynomet är $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 \\ -3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-4-\lambda) + 18 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$, så egenvärdena blir $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 2$. Egenvektorer till λ_1:
$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{ Egenvektor } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
Egenvektorer till λ_2:
$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{ Egenvektor } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
Detta ger $A = PDP^{-1}$ med $P = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.
Låt $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = P^{-1}\mathbf{x}(t)$. Då får vi $\mathbf{y}'(t) = D\mathbf{y}(t)$, dvs $\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) \end{cases}$.
De allmänna lösningarna är $\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{-t} \\ y_2(t) = C_2 e^{2t} \end{cases}$.
Begynnelsevillkoren $P\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ger
$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$
Dvs $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ så $C_1 = 1$ och $C_2 = -1$. Det ursprungliga systemets lösning blir $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = P\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{2t} \\ e^{-t} - e^{2t} \end{bmatrix}$.

2. Vi använder Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess. Låt $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$,
$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Då är $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ en ortogonal bas för W. Ortogonalprojektionen av $\mathbf{u}$ på W är

$$\begin{aligned}
\operatorname{Proj}_W \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3\cdot\mathbf{u}_3}\mathbf{u}_3 \\
&= \frac{4}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{6}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix} + \frac{-2}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\\3\\3\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

3. Den kvadratiska formen kan skrivas som $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ med $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

   Karakteristiska polynomet är

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{bmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 0 & 1-\lambda & 1\\ -1 & 1 & 2-\lambda\end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)\big((1-\lambda)(2-\lambda)-2\big) = (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda) = (1-\lambda)\lambda(\lambda-3).
\end{aligned}$$

   Så egenvärdena blir $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 3$. Egenvärdena uppfyller inte $\lambda_i > 0$ så den kvadratiska formen är inte positivt definit. Den är bara positivt semidefinit ty $\lambda_i \geq 0$.

4. a) Sant. Om A är triangulär med diagonalelement d_i så kommer $A - \lambda I$ vara triangulär med diagonalelement $d_i - \lambda$. Determinanten av en triangulär matris är produkten av diagonalelementen så $\det(A-\lambda I) = \prod_{i=1}^n (d_i - \lambda)$, vilket innebär att $\{d_i\}_{i=1}^n$ är egenvärdena.

   b) Falskt. Till exempel $A = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ ger $A + B = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, $\det(A) = 1$, $\det(B) = 1$ och $\det(A+B) = 3$, så $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

   c) Sant. Matrisen är symmetrisk så spektralsatsen säger att den är ortogonalt diagonaliserbar vilket innebär att den är diagonaliserbar.

   d) Falskt. Till exempel $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ ger $\|\operatorname{Proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\| = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|} = 1$ och $\|\operatorname{Proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}\| = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = 1/\sqrt{2}$.

5. a) $y(x) = 0$ är en lösning till ekvationen, men uppfyller inte begynnelsevillkoret. Därför kan ekvationen formuleras om som $y^{-2}y' = \sin(x)$. Ekvationen är separabel och vi får $\int y^{-2}dy = \int \sin(x)dx \Rightarrow -y^{-1} = -\cos(x) + C \Rightarrow y = (\cos(x) - C)^{-1}$. Begynnelsevillkoret $1/2 = y(0) = (1-C)^{-1} \Rightarrow C = -1$. Alltså är $y(x) = (\cos(x)+1)^{-1}$.

   b) ODE:n kan skrivas som $y'' - y' - 2y = xe^x$. Det karakteristiska polynomet är $r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1)$. Detta ger de homogena lösningarna $y_h(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$. För att hitta en partikulärlösning gör vi ansatsen $y = ze^x$, som ger $y' = (z+z')e^x$ och $y'' = (z + 2z' + z'')e^x$. ODE:n blir då
   $(z+2z'+z'')e^x - (z+z')e^x - 2ze^x = xe^x \Leftrightarrow z'' + z' - 2z = x$. Ansatsen $z = Ax + B$ ger $A - 2Ax - 2B = x \Rightarrow \begin{cases}-2A = 1\\ A - 2B = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A = -1/2\\ B = -1/4\end{cases}$.
   Alltså $z_p = -x/2 - 1/4 \Rightarrow y_p = -(x/2 + 1/4)e^x$.
   Så $y = y_h + y_p = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - (x/2 + 1/4)e^x$.

6. Partialintegration med $x^2/2$ som primitiv till x ger

$$\begin{aligned}
\int x\arctan(x)dx &= \frac{1}{2}x^2\arctan(x) - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\arctan(x) - \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\arctan(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan(x) + C \\
&= \frac{x^2+1}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}x + C
\end{aligned}$$

7. Ett snitt av rotationskroppen vid x blir en cirkel med area $\pi(f(x))^2$. Därför blir volymen av kroppen den generaliserade integralen

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^\infty \pi(f(x))^2dx = \pi\int_0^\infty e^{-4x}dx = \pi\lim_{X\to\infty}\int_0^X e^{-4x}dx = \pi\lim_{X\to\infty}\left[\frac{e^{-4x}}{-4}\right]_0^X \\
&= \pi\lim_{X\to\infty}\left(-\frac{1}{4}e^{-4X} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Så volymen är ändlig och $V = \pi/4$.

8. Vi har MacLaurinutvecklingarna

$$\begin{aligned}
e^{x^2} &= 1 + x^2 + \mathcal{O}(x^4) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4) \\
\arctan(x) &= x + \mathcal{O}(x^3).
\end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x\arctan(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2+\mathcal{O}(x^4) - (1-\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^4))}{x(x+\mathcal{O}(x^3))} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^2+\mathcal{O}(x^4)}{x^2+\mathcal{O}(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}+\mathcal{O}(x^2)}{1+\mathcal{O}(x^2)} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$