Matematiska vetenskaper
Göteborgs universitet
Thomas Bäckdahl

Datum: 2016-04-05 Tid: 08:30-12:30
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Johannes Borgqvist Tel.: ankn 5325

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 2.

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng.

1. Bestäm minstakvadratlösningen till problemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ då $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Bestäm även minstakvadratfelet. **(3p)**

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   a) Bestäm en ortogonal bas för nollrummet till matrisen A. **(3p)**

   b) Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{u}$ på nollrummet till A. **(1p)**

3. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

   a) Bestäm alla egenvärden och motsvarande egenvektorer för A. **(2p)**

   b) Diagonalisera matrisen A eller förklara varför det inte går. **(1p)**

4. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.

   a) Om A är en 3×3 matris så är $\det(3A) = 3\det(A)$. **(1p)**

   b) En 2×2 matris har alltid två linjärt oberoende egenvektorer. **(1p)**

   c) Om A är en diagonaliserbar $n \times n$ matris så är $\det(A)$ produkten av dess egenvärden räknad med multiplicitet. **(1p)**

5. a) Lös differentialekvationen $(1 + x^2)y' = 2xy$ där $y(0) = 2$. **(2p)**

   b) Lös differentialekvationen $y'' = 5y' - 6y + e^x$. **(3p)**

6. Bestäm den primitiva funktionen
$$\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + x} dx.$$
(2p)

7. Beräkna arean av området som begränsas nedåt av $y = x^2 - 4$ och uppåt av $y = 2x - 1$ och $y = -2x + 4$. **(2p)**

8. Beräkna gränsvärdet
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 2x^2) - \ln(1 + 3x^2)}{\cos(3x) - 1}$$
med hjälp av MacLaurinutveckling. **(3p)**

Vänd

Några standard MacLaurin utvecklingar:

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}) \\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1})
\end{aligned}
$$