Matematiska vetenskaper
Göteborgs universitet
Thomas Bäckdahl

Datum: 2016-04-05 Tid: 08:30-12:30
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Johannes Borgqvist Tel.: ankn 5325

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 2.

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng.

1. Bestäm minstakvadratlösningen till problemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ då $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Bestäm även minstakvadratfelet. **(3p)**

   Lösning: Minstakvadratlösningen löser normalekvationerna $A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$. Vi har $A^TA = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$ och $A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$. $\det(A^TA) = 2$ så $(A^TA)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.
   Detta ger minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$. Minstakvadratfelet är $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| = \| \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \\ -3/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \| = \| \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} \| = \sqrt{\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   a) Bestäm en ortogonal bas för nollrummet till matrisen A. **(3p)**

   b) Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{u}$ på nollrummet till A. **(1p)**

   Lösning:

   a)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 2x_4 \\ x_2 = x_3 - x_4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_1} x_3 + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_2} x_4$$

   Ortogonalisering ger $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$ och
$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-4-1+0+0}{4+1+1+0}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

   Som ortogonal bas kan vi välja $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ eller om vi vill använda heltal $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2'\}$ där $\mathbf{b}_2' = 6\mathbf{b}_2$.

b) $$\mathrm{Proj}_{\mathrm{Nul}(A)}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 + \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{b}_2'}{\mathbf{b}_2'\cdot\mathbf{b}_2'}\mathbf{b}_2' = \frac{-2+3+0+0}{4+1+1+0}\mathbf{b}_1 + \frac{2-3+0+12}{4+1+25+36}\mathbf{b}_2'$$
$$= \frac{1}{6}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2') = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm alla egenvärden och motsvarande egenvektorer för A. **(2p)**

b) Diagonalisera matrisen A eller förklara varför det inte går. **(1p)**

Lösning:

a) Det karakteristiska polynomet är

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -4 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (3-\lambda)((1-\lambda)^2 - 4) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda).$$

Så egenvärdena är $\lambda = -1$ med multiplicitet 1 och $\lambda = 3$ med multiplicitet 2. Egenvektorer för $\lambda = -1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_1} \frac{x_2}{2}.$$

Alltså egenvektorerna för $\lambda = -1$ är $\mathrm{Span}\{\mathbf{u}_1\}$.
Egenvektorer för $\lambda = 3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_2} \frac{x_2}{2} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_3} x_3.$$

Alltså egenvektorerna för $\lambda = 3$ är $\mathrm{Span}\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

b) A är diagonaliserbar ty dimensionen av egenrummen stämmer överens med multipliciteten för motsvarande egenvärde.
Vi får $A = PDP^{-1}$ med $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ och $P = [\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.

a) Om A är en 3×3 matris så är $\det(3A) = 3\det(A)$. **(1p)**

b) En 2×2 matris har alltid två linjärt oberoende egenvektorer. **(1p)**

c) Om A är en diagonaliserbar $n\times n$ matris så är $\det(A)$ produkten av dess egenvärden räknad med multiplicitet. **(1p)**

Lösning:

a) Falskt. Med $A = I$ blir $\det(A) = 1$, men $\det(3A) = 3^3 = 27$.

b) Falskt. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ har egenvärde $\lambda = 0$ med multiplicitet 2, men motsvarande egenrum är Span$\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$.

c) Sant. $A = PDP^{-1}$ ger $\det(A) = \det(P)\det(D)\det(P^{-1}) = \det(P)\det(D)\dfrac{1}{\det(P)} = \det(D)$ som är produkten av diagonalelementen i D, dvs produkten av egenvärdena.

5. a) Lös differentialekvationen $(1 + x^2)y' = 2xy$ där $y(0) = 2$. **(2p)**

b) Lös differentialekvationen $y'' = 5y' - 6y + e^x$. **(3p)**

Lösning:

a) Ekvationen är separabel och kan skrivas $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2x}{(1 + x^2)}$. Detta ger

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{2x}{(1+x^2)}dx \Rightarrow \ln|y| = \ln|1 + x^2| + C = \ln(1 + x^2) + C$$
$$\Rightarrow |y| = e^{\ln(1+x^2)+C} = (1 + x^2)e^C.$$

Begynnelsevärdet $y(0) = 2$ ger $e^C = 2$ och $y(0) > 0$. Då $(1 + x^2)$ aldrig växlar tecken blir $y(x) > 0$ för alla x. Således blir $y(x) = 2(1 + x^2)$.

b) Differentialekvationen kan skrivas som $y'' - 5y' + 6y = e^x$. Sök de homogena lösningarna: Det karakteristiska polynomet är $r^2 - 5r + 6 = (r - 3)(r - 2)$, så $y_h(x) = C_1e^{3x}+C_2e^{2x}$. Sök partikulärlösning: Låt $y = ze^x$. Då blir $y' = (z'+z)e^x$, $y'' = (z'' + 2z' + z)e^x$. Differentialekvationen blir då

$$((z'' + 2z' + z) - 5(z' + z) + 6z)e^x = e^x \Leftrightarrow z'' - 3z' + 2z = 1.$$

Så $z_p = \frac{1}{2}$ är en lösning som ger $y_p = \frac{1}{2}e^x$. Således får vi den allmänna lösningen $y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^x$.

6. Bestäm den primitiva funktionen

$$\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + x}dx.$$

(2p)

Lösning: Faktorisera nämnaren:

$$\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + x}dx = \int \frac{x^2 + 2x + 3}{x(x^2 + 1)}dx$$

Gör en partialbråksansats:

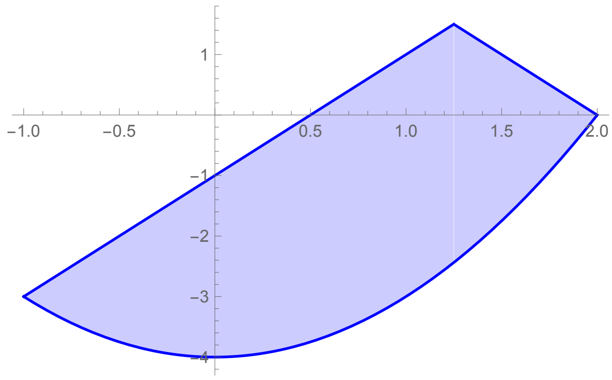
$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}.$$

Matchning av koefficienter i ekvationen $x^2 + 2x + 3 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)x$ ger $A = 3,\ B = -2$ och $C = 2$. Vi får

$$\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + x}dx = \int \frac{3}{x} + \frac{-2x + 2}{x^2 + 1}dx = \int 3\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 + 1} + 2\frac{1}{x^2 + 1}dx$$
$$= 3\ln|x| - \ln(x^2 + 1) + 2\arctan(x) + C.$$

7. Beräkna arean av området som begränsas nedåt av $y = x^2 - 4$ och uppåt av $y = 2x - 1$ och $y = -2x + 4$. **(2p)**
Lösning: Linjerna skär varandra i $x = \frac{5}{4}$. Området begränsas därför uppåt av $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{då } x \le \frac{5}{4} \\ -2x+4 & \text{då } x \ge \frac{5}{4} \end{cases}$ och nedåt av $g(x) = x^2 - 4$. Funktionerna $f(x)$ och $g(x)$ sär varandra i $x = -1$ och $x = 2$, så arean blir

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} f(x) - g(x)dx &= \int_{-1}^{\frac{5}{4}} 2x - 1 - (x^2-4)dx + \int_{\frac{5}{4}}^{2} -2x + 4 - (x^2-4)dx \\
&= \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_{-1}^{\frac{5}{4}} + \left[-\tfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 8x\right]_{\frac{5}{4}}^{2} \\
&= -\tfrac{1}{3}(\tfrac{5}{4})^3 + (\tfrac{5}{4})^2 + 3\tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) \\
&\quad - \tfrac{1}{3}2^3 - 2^2 + 8 \cdot 2 + \tfrac{1}{3}(\tfrac{5}{4})^3 + (\tfrac{5}{4})^2 - 8 \cdot \tfrac{5}{4} \\
&= \frac{63}{8}.
\end{aligned}
$$



8. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x^2) - \ln(1+3x^2)}{\cos(3x) - 1}$$

med hjälp av MacLaurinutveckling. **(3p)**
Lösning: Standardutvecklingarna ger

$$
\begin{aligned}
\ln(1+2x^2) &= 2x^2 + \mathcal{O}(x^4), \\
\ln(1+3x^2) &= 3x^2 + \mathcal{O}(x^4), \\
\cos(3x) &= 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x^2) - \ln(1+3x^2)}{\cos(3x) - 1} &= \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + \mathcal{O}(x^4) - (3x^2 + \mathcal{O}(x^4))}{1 - \frac{9}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4) - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2 + \mathcal{O}(x^4)}{-\frac{9}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{-1 + \mathcal{O}(x^2)}{-\frac{9}{2} + \mathcal{O}(x^2)} = \frac{-1}{-\frac{9}{2}} = \frac{2}{9}
\end{aligned}
$$