Matematiska vetenskaper
Göteborgs universitet
Thomas Bäckdahl

Datum: 2016-08-25 Tid: 14:00-18:00
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Linnea Hietala Tel.: ankn 5325

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 2.

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng.

1. För vilka värden på konstanten a är $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix}$ inverterbar? **(2p)**

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

   a) Bestäm en ortogonal bas $\mathcal{B}$ för kolonnrummet $\mathrm{Col}(A)$. **(3p)**

   b) Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathrm{Col}(A)$ i basen $\mathcal{B}$, dvs $[\mathrm{Proj}_{\mathrm{Col}(A)}\,\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}$. **(1p)**

   c) Bestäm minsta avståndet mellan $\mathbf{u}$ och $\mathrm{Col}(A)$, dvs minsta värdet av $\|\mathbf{u} - A\mathbf{x}\|$ för $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$. **(1p)**

3. Lös följande system av differentialekvationer med hjälp av diagonalisering **(3p)**

$$\begin{cases} x_1'(t) = & 4x_1(t) & + & 5x_2(t) \\ x_2'(t) = & -x_1(t) & - & 2x_2(t) \end{cases}$$

4. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.

   a) Om $\mathbf{v}$ är en egenvektor till matrisen A, så är $\mathbf{v}$ egenvektor till A^k för alla heltal $k \geq 0$. **(1p)**

   b) Om A är en diagonaliserbar 3×3 matris så måste A ha 3 olika egenvärden. **(1p)**

   c) Om A är en $n \times (n+1)$ matris så är $\dim(\mathrm{Nul}(A)) = 1$. **(1p)**

5. a) Lös differentialekvationen $(x+1)y' = -3xy^2$ för $x > -1$ där $y(0) = 1/3$. **(2p)**

   b) Lös differentialekvationen $y'' + y' - 6y = 6x^2 - 2x + 4$. **(3p)**

6. Bestäm den primitiva funktionen

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx.$$

(2p)

7. Området $A = \{0 \leq y \leq (1+x^2)^{-1/2}, 0 \leq x < \infty\}$ roteras kring x-axeln. Blir volymen av rotationskroppen ändlig, och i så fall hur stor? **(2p)**

8. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - \exp(x^2)}{1 - \sqrt{1+x^2}}$$

med hjälp av MacLaurinutveckling. **(3p)**

Vänd

Några standard MacLaurin utvecklingar:

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}) \\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1})
\end{aligned}
$$