Matematiska vetenskaper	Datum: 2016-08-25	Tid: 14:00-18:00
Göteborgs universitet	Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.	
Thomas Bäckdahl	Telefonvakt: Linnea Hietala	Tel.: ankn 5325

Lösningsförslag till Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 2.

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng.

1. För vilka värden på konstanten a är $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix}$ inverterbar? **(2p)**

   Lösning: Determinantkriteriet ger att A är inverterbar omm $\det(A) \neq 0$. Beräkning ger $\det(A) = a^2 - 4 = (a-2)(a+2)$ så A är inverterbar omm $a \neq \pm 2$.

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

   a) Bestäm en ortogonal bas $\mathcal{B}$ för kolonnrummet $\mathrm{Col}(A)$. **(3p)**

   Lösning: Låt $\mathbf{a}_k$ beteckna kolonn k i A. Radreduktion ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Första, andra och fjärde kolonn är pivotkolonn, så $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$ utgör en bas för $\mathrm{Col}(A)$. Den är dock inte ortogonal, så vi använder Gram-Schmidt för att hitta en ortogonal bas. $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \dfrac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{a}_3}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 - \frac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{a}_3}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   Så $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ utgör en ortogonal bas för $\cos(A)$.

   b) Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathrm{Col}(A)$ i basen $\mathcal{B}$, dvs $[\mathrm{Proj}_{\mathrm{Col}(A)}\,\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}$. **(1p)**

   Lösning: $\mathrm{Proj}_{\mathrm{Col}(A)}\,\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 + \dfrac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2 + \dfrac{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_3}\mathbf{b}_3 = 0\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3$, så $[\mathrm{Proj}_{\mathrm{Col}(A)}\,\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

   c) Bestäm minsta avståndet mellan $\mathbf{u}$ och $\mathrm{Col}(A)$, dvs minsta värdet av $\|\mathbf{u} - A\mathbf{x}\|$ för $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$. **(1p)**

   Lösning: Mista avståndet fås av ortogonalprojektionen så $\|\mathbf{u} - \mathrm{Proj}_{\mathrm{Col}(A)}\,\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{u} - A\mathbf{x}\|$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$. Vi får $\mathrm{Proj}_{\mathrm{Col}(A)}\,\mathbf{u} = 2\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och

$$\|\mathbf{u} - \mathrm{Proj}_{\mathrm{Col}(A)}\,\mathbf{u}\| = \|\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}\| = \sqrt{20}.$$

3. Lös följande system av differentialekvationer med hjälp av diagonalisering **(3p)**

$$\begin{cases} x_1'(t) = & 4x_1(t) & + & 5x_2(t) \\ x_2'(t) = & -x_1(t) & - & 2x_2(t) \end{cases}$$

Lösning: Med $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ och $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ blir systemet $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$.

Diagonalisera A. Karakteristiska polynomet är $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$ $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$, så egenvärdena blir $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 3$.
Egenvektorer till λ_1:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{ Egenvektor } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenvektorer till λ_2:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{ Egenvektor } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Detta ger $A = PDP^{-1}$ med $P = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Låt $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = P^{-1}\mathbf{x}(t)$. Då får vi $\mathbf{y}'(t) = P^{-1}\mathbf{x}'(t) = P^{-1}PDP^{-1}\mathbf{x}(t) =$ $D\mathbf{y}(t)$, dvs $\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) \\ y_2'(t) = 3y_2(t) \end{cases}$. De allmänna lösningarna är $\begin{cases} y_1(t) = C_1e^{-t} \\ y_2(t) = C_2e^{3t} \end{cases}$.
Det ursprungliga systemets lösning blir

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = P\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1e^{-t} \\ C_2e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1e^{-t} - 5C_2e^{3t} \\ C_1e^{-t} + C_2e^{3t} \end{bmatrix}.$$

4. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.

   a) Om $\mathbf{v}$ är en egenvektor till matrisen A, så är $\mathbf{v}$ egenvektor till A^k för alla heltal $k \geq 0$. **(1p)**
   Svar: Sant. Om $\mathbf{v}$ är egenvektor till A med egenvärde λ så är $A^k\mathbf{v} = A^{k-1}A\mathbf{v} = \lambda A^{k-1}\mathbf{v} = \cdots = \lambda^k\mathbf{v}$, så $\mathbf{v}$ är egenvektor till A^k med egenvärde λ^k.

   b) Om A är en diagonaliserbar 3×3 matris så måste A ha 3 olika egenvärden. **(1p)**
   Svar: Falskt. $A = I$ är diagonal och därmed diagonaliserbar men har bara egenvärdet $\lambda_1 = 1$ med multiplicitet 3.

   c) Om A är en $n \times (n+1)$ matris så är $\dim(\mathrm{Nul}(A)) = 1$. **(1p)**
   Svar: Falskt. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ har $\dim(\mathrm{Nul}(A)) = 2$.

5. a) Lös differentialekvationen $(x+1)y' = -3xy^2$ för $x > -1$ där $y(0) = 1/3$. **(2p)**
   Lösning: $y = 0$ löser evationen, men inte begynnelsevillkoret. Ekvationen är separabel och kan skrivas som $\dfrac{y'}{y^2} = \dfrac{-3x}{x+1} = -3 + \dfrac{3}{x+1}$, så vi får för $x > -1$

$$\frac{-1}{y} + C_1 = \int \frac{1}{y}dy = \int \Big(-1 + \frac{3}{x+1}\Big)dx = -3x + 3\ln(x+1) + C_2.$$

Låt $C_3 = C_2 - C_1$. Då är $y = \dfrac{1}{3x - 3\ln(x+1) - C_3}$. Begynnelsevärdet ger $\dfrac{1}{3} = y(0) = \dfrac{1}{-C_3}$, dvs $C_3 = -3$.

Svar: $y(x) = \dfrac{1}{3x - 3\ln(x+1) + 3}$ för $x > -1$.

b) Lös differentialekvationen $y'' + y' - 6y = 6x^2 - 2x + 4$. **(3p)**

Lösning: Det karakteristiska polynomet är $r^2 + r - 6 = (r+3)(r-2)$ så de homogena lösningarna är $y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$. Sök partikulärlösning: Ansatsen $y_p = Ax^2 + Bx + C$ ger $y_p' = 2Ax + B$, $y_p'' = 2A$. Insättning i ekvationen ger

$$-6Ax^2 + (2A - 6B)x + (2A + B - 6C) = 6x^2 - 2x + 4 \Rightarrow \begin{cases} -6A = 6 \\ 2A - 6B = -2 \\ 2A + B - 6C = 4 \end{cases}$$

som har lösningen $A = -1$, $B = 0$, $C = -1$. Så $y_p = -x^2 - 1$.

Svar: $y = y_h + y_p = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} - x^2 - 1$.

6. Bestäm den primitiva funktionen

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx.$$

(2p)

Lösning: Variabelbytet $t = \sqrt{x}$ ger $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ och $\displaystyle\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \int 2\sin(t)dt = -2\cos(t) + C = -2\cos(\sqrt{x}) + C$.

7. Området $A = \{0 \le y \le (1+x^2)^{-1/2}, 0 \le x < \infty\}$ roteras kring x-axeln. Blir volymen av rotationskroppen ändlig, och i så fall hur stor? **(2p)**

Lösning: $\displaystyle\int_0^X \pi y^2 dx = \int_0^X \frac{\pi}{1+x^2} dx = \big[\pi \arctan(x)\big]_0^X = \pi \arctan(X) \to \tfrac{1}{2}\pi^2$ då $X \to \infty$. Så rotationsvolymen är ändlig och lika med $\frac{1}{2}\pi^2$.

8. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - \exp(x^2)}{1 - \sqrt{1+x^2}}$$

med hjälp av MacLaurinutveckling. **(3p)**

Lösning:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - \exp(x^2)}{1 - \sqrt{1+x^2}} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - 2x^2 + \mathcal{O}(x^4) - (1 + x^2 + \mathcal{O}(x^4))}{1 - (1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4))} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-3x^2 + \mathcal{O}(x^4)}{-\frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)} = 6.\end{aligned}$$