Matematiska vetenskaper
Göteborgs universitet
Thomas Bäckdahl

Datum: 2017-01-11 Tid: 14:00-18:00
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Thomas Bäckdahl Tel.: ankn 5325

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 2.

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng.

1. En matris A har egenvektorerna $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ med motsvarande egenvärden $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 2$. Bestäm matrisen A. **(3p)**

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$.
   a) Bestäm en ortogonal bas för nollrummet $\mathrm{Nul}(A)$. **(3p)**
   b) Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathrm{Nul}(A)$. **(1p)**

3. Låt $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Bestäm minstakvadratlösningen till problemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Bestäm även avståndet mellan $\mathbf{b}$ och kolonnrummet $\mathrm{Col}(A)$. **(3p)**

4. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.
   a) Om A och P är kvadratiska matriser och P är inverterbar så har $B = PAP^{-1}$ samma karakteristiska polynom som A. **(1p)**
   b) Om $\mathbf{a}$ är en vektor i $\mathbb{R}^n$ och $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ är en bas för ett underrum W, då är $\mathbf{a} - \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 - \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2\cdot\mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2$ ortogonal mot W. **(1p)**
   c) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 \geq 0$ för alla reella värden (x_1, x_2). **(1p)**

5. a) Lös differentialekvationen $y' = 2x(y^2 + 1)$ där $y(0) = 1$. **(2p)**
   b) Lös differentialekvationen $y'' - 2y' - 8y = e^x$. **(3p)**

6. Bestäm den primitiva funktionen
$$\int \frac{x^3 + 1}{x(x+1)(x+2)} dx.$$
(2p)

7. Avgör med hjälp av Cauchys integralkriterium om $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4 + k^2}$ är konvergent eller divergent. **(2p)**

8. Beräkna gränsvärdet
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x) - \sin(2x)}{\exp(2x^2) - \cos(x)}$$
med hjälp av MacLaurin utveckling. **(3p)**

Vänd

Några standard MacLaurin utvecklingar:

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}) \\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1})
\end{aligned}
$$