Matematiska vetenskaper Göteborgs universitet Thomas Bäckdahl

Datum: 2017-01-11 Tid: 14:00-18:00
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Thomas Bäckdahl Tel.: ankn 5325

Lösningsförslag till Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 2.

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng.

1. En matris A har egenvektorerna $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ med motsvarande egenvärden $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 2$. Bestäm matrisen A. **(3p)**

   Lösning: Vi har faktoriseringen $A = PDP^{-1}$ med $P = [\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Gausseliminering ger $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   $A = PDP^{-1} = P \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$.

   a) Bestäm en ortogonal bas för nollrummet $\mathrm{Nul}(A)$. **(3p)**

   Lösning: Radreduktion av $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ger $\mathbf{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_1} x_3 + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_2} x_4$, så $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ utgör en bas för $\mathrm{Nul}(A)$, men den är inte ortogonal. Av Gram-Schmidt får vi $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Så $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ utgör en ortogonal bas för $\mathrm{Nul}(A)$.

   b) Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathrm{Nul}(A)$. **(1p)**
   Lösning: Ortogonalprojektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathrm{Nul}(A)$ blir

   $$\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

3. Låt $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Bestäm minstakvadratlösningen till problemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Bestäm även avståndet mellan $\mathbf{b}$ och kolonnrummet $\mathrm{Col}(A)$. **(3p)**
   Lösning: Vi löser normalekvationerna $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$. Vi får $A^T A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

och $A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$. Av detta får vi $\det(A^TA) = 27$, $(A^TA)^{-1} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Minstakvadratlösningen blir $\hat{\mathbf{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \end{bmatrix}$. Projektionen av $\mathbf{b}$ på $\mathrm{Col}(A)$ är $\mathbf{b}_\parallel = A\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix}$. Avståndet mellan $\mathbf{b}$ och $\mathrm{Col}(A)$ är således $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}_\parallel\| = \|\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.

a) Om A och P är kvadratiska matriser och P är inverterbar så har $B = PAP^{-1}$ samma karakteristiska polynom som A. **(1p)**
Svar: Sant. $\det(B - \lambda I) = \det(PAP^{-1} - \lambda PP^{-1}) = \det(P(A - \lambda I)P^{-1}) = \det(P)\det(A - \lambda I)\det(P^{-1}) = \det(P)\det(A - \lambda I)/\det(P) = \det(A - \lambda I)$.

b) Om $\mathbf{a}$ är en vektor i $\mathbb{R}^n$ och $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ är en bas för ett underrum W, då är $\mathbf{a} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2\cdot\mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2$ ortogonal mot W. **(1p)**
Svar: Falskt. Basen måste vara ortogonal. Motexempel i $\mathbb{R}^3$:
$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ger $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2\cdot\mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
men $\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}_1 = -1$ och $\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}_2 = -1$, så $\mathbf{c}$ är inte ortogonal mot W.

c) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 \geq 0$ för alla reella värden (x_1, x_2). **(1p)**
Svar: Falskt. Med $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ och $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ blir $Q = \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$. A har egenvärden $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 3$, så Q är indefinit. Egenvektorn $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ med egenvärde λ_1 ger motexemplet $Q(-1, 1) = -2$.

5. a) Lös differentialekvationen $y' = 2x(y^2 + 1)$ där $y(0) = 1$. **(2p)**
bf Lösning: Ekvationen är separabel och kan skrivas $\frac{y'}{y^2+1} = 2x$ vilket ger $\int \frac{1}{y^2+1}dy = \int 2x dx$. Integration ger implicita lösningar $\arctan y = x^2 + C$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger $C = \arctan(1) = \pi/4$, så vi får $y = \tan(\frac{1}{4}\pi + x^2)$.

b) Lös differentialekvationen $y'' - 2y' - 8y = e^x$. **(3p)**
Lösning: Det karakteristiska polynomet är $r^2 - 2r - 8 = (r-4)(r+2)$ så de homogena lösningarna är $y_h = C_1e^{4x} + C_2e^{-2x}$. Sök partikulärlösning: Variabelbytet $y(x) = z(x)e^x$ ger $y' = (z' + z)e^x$ och $y'' = (z'' + 2z' + z)e^x$. Differentialekvationen kan då skrivas som $e^x = ((z'' + 2z' + z) - 2(z' + z) - 8z)e^x$. Efter förkortning får vi $z'' - 9z = 1$ som har partikulärlösning $z_p = -\frac{1}{9}$. Vi får därför partikulärlösningen $y_p = z_pe^x = -\frac{1}{9}e^x$
Svar: $y = y_h + y_p = C_1e^{4x} + C_2e^{-2x} - \frac{1}{9}e^x$.

6. Bestäm den primitiva funktionen

$$\int \frac{x^3+1}{x(x+1)(x+2)}dx.$$

(2p)

Lösning: Polynomdivision ger $\dfrac{x^3+1}{x(x+1)(x+2)} = 1 + \dfrac{-3x^2-2x+1}{x(x+1)(x+2)}$. Partialbråksansatsen $\dfrac{-3x^2-2x+1}{x(x+1)(x+2)} = \dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x+2}$ och handpåläggningsmetoden ger $A = 1/2$, $B = 0$, $C = -7/2$. Alltså får vi

$$\int \frac{x^3+1}{x(x+1)(x+2)}dx = \int 1+\frac{1}{2x}-\frac{7}{2(x+2)}dx = x+\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{7}{2}\ln|x+2|+C.$$

7. Avgör med hjälp av Cauchys integralkriterium om $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4+k^2}$ är konvergent eller divergent. **(2p)**

Lösning: $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$ är positiv och kontinuerlig. Vi har även att $f'(x) = \dfrac{-2x}{(4+x^2)^2} < 0$ för $x > 0$, så $f(x)$ är avtagande för $x > 0$. Vi kan därför använda Cauchys integralkriterium föra att säga att $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4+k^2}$ är konvergent om och endast om $\int_0^{\infty}\dfrac{1}{4+x^2}dx$ är konvergent. Vi har

$$\int_0^X \frac{1}{4+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^X \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \left[\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right]_0^X = \frac{1}{2}\arctan\frac{X}{2} \to \frac{\pi}{4} \text{ då } X\to\infty.$$

8. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)-\sin(2x)}{\exp(2x^2)-\cos(x)}$$

med hjälp av MacLaurin utveckling. **(3p)**

Lösning:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)-\sin(2x)}{\exp(2x^2)-\cos(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{2x-2x^2+\mathcal{O}(x^3)-(2x+\mathcal{O}(x^3))}{1+2x^2+\mathcal{O}(x^3)-(1-\frac{1}{2}x^2+\mathcal{O}(x^3))}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-2x^2+\mathcal{O}(x^3)}{\frac{5}{2}x^2+\mathcal{O}(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{-2+\mathcal{O}(x)}{\frac{5}{2}+\mathcal{O}(x)} = \frac{-2}{\frac{5}{2}} = \frac{-4}{5}.\end{aligned}$$