Matematiska vetenskaper Göteborgs universitet Thomas Bäckdahl

Datum: 2017-04-18 Tid: 08:30-12:30
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Gustav Kettil Tel.: ankn 5325

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 2.

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng.

1. Lös med hjälp av diagonalisering följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = & x_1(t) & + 6x_2(t) \\ x_2'(t) = & -x_1(t) & - 4x_2(t) \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$. **(3p)**

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & -5 & -7 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

   a) Bestäm en ortogonal bas $\mathcal{B}$ för kolonnrummet $\mathrm{Col}(A)$. **(2p)**

   b) Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{b}$ på $\mathrm{Col}(A)$. **(1p)**

   c) Bestäm minsta avståndet mellan $\mathbf{b}$ och $\mathrm{Col}(A)$, dvs minsta värdet av $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$ för $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$. **(1p)**

   d) Använd b) för att bestämma minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. **(2p)**

3. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.

   a) Det finns en 2×3 matris A med $\dim(\mathrm{Nul}(A)) = \dim(\mathrm{Col}(A))$. **(1p)**

   b) Om $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ är egenvektorer till en matris A och $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ har olika egenvärden. Då måste $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ vara ortogonala. **(1p)**

   c) $Q(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2 \leq 0$ för alla reella värden (x_1, x_2). **(1p)**

4. a) Lös differentialekvationen $y'' + y' - 6y = e^{-2x}$. **(3p)**

   b) Lös differentialekvationen $(x-1)y' = -2xe^{-y}$ för $x > 1$ där $y(2) = 0$. **(3p)**

5. Bestäm den primitiva funktionen

$$\int x \ln(2 + x^2)dx.$$

(2p)

6. Beräkna arean av området som begränsas uppåt av $y = 3 - x^2$ och nedåt av $y = 4x - 9$ och $y = -2x$. **(2p)**

7. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 2x) + \ln(1 - 3x^2) - 2\sin(x)}{1 - \cos(4x)}$$

med hjälp av MacLaurin utveckling. **(3p)**

Vänd

Några standard MacLaurin utvecklingar:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}) \\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1})
\end{aligned}$$