Matematiska vetenskaper
Göteborgs universitet
Thomas Bäckdahl

Datum: 2017-04-18 Tid: 08:30-12:30
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Gustav Kettil Tel.: ankn 5325

Lösningsförslag till Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 2.

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng.

1. Lös med hjälp av diagonalisering följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = & x_1(t) & + 6x_2(t) \\ x_2'(t) = & -x_1(t) & -4x_2(t) \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$. **(3p)**

Lösning: Med $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ och $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ blir systemet $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$.

Diagonalisera A. Karakteristiska polynomet är $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 \\ -1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+2)(\lambda+1)$, så egenvärdena blir $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_2 = -1$.

Egenvektorer till λ_1:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{ Egenvektor } \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenvektorer till λ_2:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{ Egenvektor } \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Detta ger $A = PDP^{-1}$ med $P = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Låt $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = P^{-1}\mathbf{x}(t)$. Då får vi $\mathbf{y}'(t) = P^{-1}\mathbf{x}'(t) = P^{-1}PDP^{-1}\mathbf{x}(t) = D\mathbf{y}(t)$, dvs $\begin{cases} y_1'(t) = -2y_1(t) \\ y_2'(t) = -y_2(t) \end{cases}$. De allmänna lösningarna är $\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{-2t} \\ y_2(t) = C_2 e^{-t} \end{cases}$.

Det ursprungliga systemets lösning blir

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = P\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{-2t} \\ C_2 e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Begynnelsevillkoren ger $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$ vilket ger $C_1 = 5$ och $C_2 = -4$.

Svar: $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5e^{-2t} \\ -4e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10e^{-2t} + 12e^{-t} \\ 5e^{-2t} - 4e^{-t} \end{bmatrix}$.

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & -5 & -7 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm en ortogonal bas $\mathcal{B}$ för kolonnrummet $\mathrm{Col}(A)$. **(2p)**
Lösning: Låt $\mathbf{a}_k$ beteckna kolonn k i A. Vi kan använda Gram-Schmidt för att hitta en ortogonal bas för $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$. Egentligen bör man kontrollera att man har en bas från början, men om någon vektor $\mathbf{a}_k$ skulle vara en linjärkombination av $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{k-1}$ så skulle Gram-Schmidt ge en nollvektor som vi därmed kan kasta bort.

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_2 - 2\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{a}_3}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 - \frac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{a}_3}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_3 - 3\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

Så $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ utgör en ortogonal bas för $\mathrm{Col}(A)$.

b) Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{b}$ på $\mathrm{Col}(A)$. **(1p)**

Lösning: $\mathbf{b}_{\|} = \dfrac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 + \dfrac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2 + \dfrac{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_3}\mathbf{b}_3 = 0\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$

c) Bestäm minsta avståndet mellan $\mathbf{b}$ och $\mathrm{Col}(A)$, dvs minsta värdet av $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$ för $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$. **(1p)**
Lösning: Mista avståndet fås av ortogonalprojektionen så $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}_{\|}\| \leq \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$

för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$. Vi får avståndet $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}_{\|}\| = \| \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \| = \sqrt{10}.$

d) Använd b) för att bestämma minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. **(2p)**
Lösning: Minstakvadratlösningen fås av att lösa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_{\|}$, dvs $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_{\|}$, men vi vet från b) och a) att $\mathbf{b}_{\|} = 0\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3 = -2\mathbf{b}_2 - (\mathbf{a}_3 - 3\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2) = 3\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_3 = 3\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3$, så minstakvadratlösningen blir $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

3. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.

a) Det finns en 2×3 matris A med $\dim(\mathrm{Nul}(A)) = \dim(\mathrm{Col}(A))$. **(1p)**
Svar: Falskt. Rangsatsen ger att $\dim(\mathrm{Nul}(A)) + \dim(\mathrm{Col}(A)) = 3$.
Om $\dim(\mathrm{Nul}(A)) = \dim(\mathrm{Col}(A))$ skulle vi få $2\dim(\mathrm{Col}(A)) = 3$ vilket är omöjligt då dimensionen är ett heltal.

b) Om $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ är egenvektorer till en matris A och $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ har olika egenvärden. Då måste $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ vara ortogonala. **(1p)**
Svar: Falskt. Om A är symmetrisk är påståendet sant, men t.ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ som i uppg 1 får vi $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ med egenvärden $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_1 = -1$ men $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 7$, så egenvektorerna är inte ortogonala.

c) $Q(x_1,x_2) = -3x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2 \leq 0$ för alla reella värden (x_1,x_2). **(1p)**

Svar: Sant. Vi kan skriva $Q = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, med $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. Karakteristiska polynomet är $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)^2 - 2^2 = (-5-\lambda)(-1-\lambda)$, så egenvärdena blir $\lambda_1 = -5$ och $\lambda_2 = -1$. Båda är negativa. Därför är den kvadratiska formen negativt definit och påståendet gäller.

4. a) Lös differentialekvationen $y'' + y' - 6y = e^{-2x}$. **(3p)**

Lösning: Det karakteristiska polynomet är $r^2 + r - 6 = (r-2)(r+3)$ så de homogena lösningarna är $y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$. Sök partikulärlösning: Variabelbytet $y(x) = z(x)e^{-2x}$ ger $y' = (z' - 2z)e^{-2x}$ och $y'' = (z'' - 4z' + 4z)e^{-2x}$. Differentialekvationen kan då skrivas som $e^{-2x} = ((z'' - 4z' + 4z) + (z' - 2z) - 6z)e^{-2x}$. Efter förkortning får vi $z'' - 3z' - 4z = 1$ som har partikulärlösning $z_p = -\frac{1}{4}$. Vi får därför partikulärlösningen $y_p = z_pe^{-2x} = -\frac{1}{4}e^{-2x}$

Svar: $y = y_h + y_p = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$.

b) Lös differentialekvationen $(x-1)y' = -2xe^{-y}$ för $x > 1$ där $y(2) = 0$. **(3p)**

Lösning: Ekvationen är separabel och kan skrivas $e^y y' = \dfrac{-2x}{x-1}$ för $x > 1$ vilket ger $\displaystyle\int e^y dy = \int \frac{-2x}{x-1}dx$. Integration ger implicita lösningar $e^y = \displaystyle\int \frac{-2x}{x-1}dx = \int -2 - 2\frac{1}{x-1}dx = -2x - 2\ln|x-1| + C$. Begynnelsevillkoret $y(2) = 0$ ger $1 = e^0 = -2\cdot 2 - 2\ln|2-1| + C = -4 + C \Rightarrow C = 5$, så vi får $y(x) = \ln\big(5 - 2x - 2\ln(x-1)\big)$ för $x > 1$.

5. Bestäm den primitiva funktionen

$$\int x\ln(2+x^2)dx.$$

(2p)

Lösning: Partialintegrera med $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ som primitiv till $f(x) = x$:

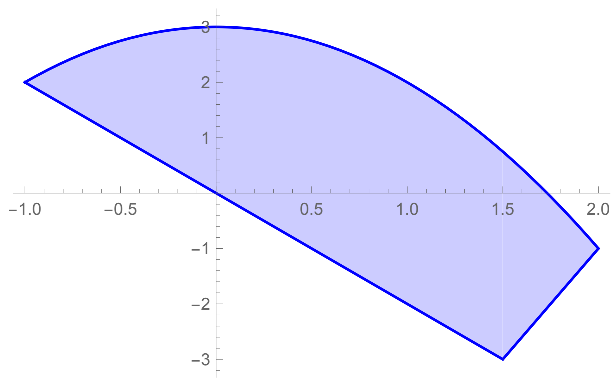
$$\begin{aligned}\int x\ln(2+x^2)dx &= (\tfrac{1}{2}x^2+1)\ln(2+x^2) - \int(\tfrac{1}{2}x^2+1)\frac{2x}{2+x^2}dx \\ &= \tfrac{1}{2}(x^2+2)\ln(2+x^2) - \int x dx = \tfrac{1}{2}(x^2+2)\ln(2+x^2) - \tfrac{1}{2}x^2 + C.\end{aligned}$$

6. Beräkna arean av området som begränsas uppåt av $y = 3 - x^2$ och nedåt av $y = 4x - 9$ och $y = -2x$. **(2p)**

Lösning: Linjerna skär varandra i $x = \frac{3}{2}$. Området begränsas därför nedåt av $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{då } x < \frac{3}{2} \\ 4x - 9 & \text{då } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$ och uppåt av $g(x) = 3 - x^2$. Funktionerna $f(x)$ och

$g(x)$ skär varandra i $x = -1$ och $x = 2$, så arean blir

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} g(x) - f(x)dx &= \int_{-1}^{\frac{3}{2}} 3 - x^2 - (-2x)dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} 3 - x^2 - (4x-9)dx \\
&= \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_{-1}^{\frac{3}{2}} + \left[-\tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 12x\right]_{\frac{3}{2}}^{2} \\
&= -\tfrac{1}{3}(\tfrac{3}{2})^3 + (\tfrac{3}{2})^2 + 3(\tfrac{3}{2}) + \tfrac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) \\
&\quad - \tfrac{1}{3}2^3 - 2\cdot 2^2 + 12\cdot 2 + \tfrac{1}{3}(\tfrac{3}{2})^3 + 2(\tfrac{3}{2})^2 - 12(\tfrac{3}{2}) \\
&= \frac{33}{4}.
\end{aligned}$$



7. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x) + \ln(1-3x^2) - 2\sin(x)}{1-\cos(4x)}$$

med hjälp av MacLaurin utveckling. **(3p)**

Lösning: Från standardutvecklingarna får vi

$$\begin{aligned}
\ln(1+2x) &= 2x - 2x^2 + \mathcal{O}(x^3), \\
\ln(1-3x^2) &= -3x^2 + \mathcal{O}(x^4), \\
2\sin(x) &= 2x + \mathcal{O}(x^3), \\
\cos(4x) &= 1 - 8x^2 + \mathcal{O}(x^4).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x) + \ln(1-3x^2) - 2\sin(x)}{1-\cos(4x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x - 2x^2 + \mathcal{O}(x^3) - 3x^2 + \mathcal{O}(x^4) - (2x + \mathcal{O}(x^3))}{1 - (1 - 8x^2 + \mathcal{O}(x^4))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-5x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{8x^2 + \mathcal{O}(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-5 + \mathcal{O}(x)}{8 + \mathcal{O}(x^2)} = \frac{-5+0}{8+0} = -\frac{5}{8}.
\end{aligned}$$