Matematiska vetenskaper
Göteborgs universitet
Thomas Bäckdahl

Datum: 2017-08-24 Tid: 14:00-18:00
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Raad Salman Tel.: ankn 5325

Lösningsförslag till Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 2.

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng.

1. Låt $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$.

   Bestäm en ortogonal bas $\mathcal{B}$ för $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ och bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{u}$ på W. **(3p)**

   Lösning: Basen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bestäms av $\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2 = \mathbf{v}_2 - \dfrac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{v}_3 - \dfrac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 - \dfrac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2 = \mathbf{v}_3 - \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   Ortogonalprojektionen av $\mathbf{u}$ på W blir $\mathbf{u}_{\parallel} = \dfrac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 + \dfrac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2 + \dfrac{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_3}\mathbf{b}_3 = 0\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$.

2. Avgör ifall den kvadratiska formen $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 2x_3^2$ är positivt definit eller inte. **(3p)**

   Lösning: $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ med $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Egenvärden: $0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((1-\lambda)^2 - 3^2) = (2-\lambda)(-2-\lambda)(4-\lambda)$ så egenvärdena blir $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 4$. Alla egenvärden är inte positiva så den kvadratiska formen är inte positivt definit.

3. Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = & -2x_1(t) & -2x_2(t) \\ x_2'(t) = & -2x_1(t) & +x_2(t) \end{cases}$$

   med begynnelsevillkoren $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = -5$. **(3p)**

   Lösning: Med $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ och $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ blir systemet $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$.

   Diagonalisera A. Karakteristiska polynomet är $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$, så egenvärdena blir $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = -3$.

   Egenvektorer till λ_1:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{Egenvektor } \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Egenvektorer till λ_2:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{ Egenvektor } \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Detta ger $A = PDP^{-1}$ med $P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.

Låt $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = P^{-1}\mathbf{x}(t)$. Då får vi $\mathbf{y}'(t) = P^{-1}\mathbf{x}'(t) = P^{-1}PDP^{-1}\mathbf{x}(t) = D\mathbf{y}(t)$, dvs $\begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) \\ y_2'(t) = -3y_2(t) \end{cases}$. De allmänna lösningarna är $\begin{cases} y_1(t) = C_1e^{2t} \\ y_2(t) = C_2e^{-3t} \end{cases}$.

Det ursprungliga systemets lösning blir

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = P\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1e^{2t} \\ C_2e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Begynnelsevillkoren ger $\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$ vilket ger $C_1 = -2$ och $C_2 = -1$.

Svar: $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2e^{2t} \\ -e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} - 2e^{-3t} \\ -4e^{2t} - e^{-3t} \end{bmatrix}$.

4. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.

   a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor till matrisen $\begin{bmatrix} 6 & -8 & 8 \\ 4 & -9 & 10 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$. **(1p)**

   Svar: Sant. $\begin{bmatrix} 6 & -8 & 8 \\ 4 & -9 & 10 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ dvs en egenvektor med egenvärde -2.

   b) Om A är en 3×3 matris med kolonnerna $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ och $\mathbf{a}_3$ sådana att $4\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_3$, så har ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oändligt många lösningar. **(1p)**

   Svar: Sant, $\mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$ löser ekvationen för alla $t \in \mathbb{R}$.

   c) Det finns en inverterbar kvadratisk matris A med egenvärde 0. **(1p)**
   Svar: Falskt. Egenvärde $\lambda = 0$ ger $0 = \det(A - \lambda I) = \det(A)$ så determinantkriteriet ger att A inte är inverterbar.

5. a) Lös differentialekvationen $xy' + 2y = x^{-1}\cos x$, $x > 0$. **(2p)**
   Lösning: Ekvationen är linjär av första ordningen och kan skrivas $y' + 2x^{-1}y = x^{-2}\cos x$. Integrerade faktorn blir $e^{2\ln|x|} = e^{\ln(x^2)} = x^2$. Differentialekvationen ger då

$$\underbrace{x^2y' + 2xy}_{\frac{d}{dx}(x^2y)} = \cos x \;\Rightarrow\; x^2y = \int \cos x dx = \sin x + C \;\Rightarrow\; y = x^{-2}\sin x + x^{-2}C.$$

   b) Lös differentialekvationen $y' = x^3e^{-2y}$, $y(0) = 0$. **(2p)**
   Lösning: Ekvationen är separabel.

$$y' = x^3e^{-2y} \Leftrightarrow e^{2y}\frac{dy}{dx} = x^3 \Rightarrow \int e^{2y}dy = \int x^3dx \Rightarrow \tfrac{1}{2}e^{2y} = \tfrac{1}{4}x^4 + C.$$

Begynnelsevärdet ger att $y = 0$ då $x = 0$, dvs $\frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{4}0^4 + C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$. Lös ut y:

$$e^{2y} = \tfrac{1}{2}x^4 + 1 \Rightarrow y = \tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{1}{2}x^4 + 1).$$

c) Lös differentialekvationen $y'' + y' - 6y = 2$. **(2p)**
Lösning: Ekvationen är linjär av andra ordningen med konstanta koefficienter. Vi börjar med den homogena ekvationen $y'' + y' - 6y = 0$. Den karakteristiska ekvationen är $0 = r^2 + r - 6 = (r + 3)(r - 2)$ som har rötter $r_1 = -3$ och $r_2 = 2$. Detta ger lösningarna $y_h = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}$.
På grund av att högerledet har gradtal 0 och lägsta derivatan är av ordning 0 så blir ansatsen för partikulärlösningen $y_p = A$ som har $y_p' = 0$ och $y_p'' = 0$. Sätter vi in detta i differentialekvationen får vi $-6A = 2 \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$. Så $y_p = -\frac{1}{3}$.
Svar: $y = y_h + y_p = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} - \frac{1}{3}$.

6. Bestäm den primitiva funktionen $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln x)^2}$. **(2p)**
Lösning: Variabelbyte ger

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \left/ \begin{array}{c} t = \ln x \\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{array} \right/ = \int t^{-2}dt = -t^{-1} + C = \frac{-1}{\ln x} + C.$$

7. Området $1 - x^2 \leq y \leq x^2 + 1$, $-1 \leq x \leq 1$ roteras runt x-axeln. Beräkna rotationsvolymen. **(2p)**
Lösning: Den efterfrågade rotationsvolymen blir rotationsvolymen mellan x-axeln och $x^2 + 1$ minus rotationsvolymen mellan x-axeln och $1 - x^2$, dvs

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} \pi(x^2 + 1)^2 - \pi(1 - x^2)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} x^4 + 2x^2 + 1 - (1 - 2x^2 + x^4)dx \\ &= \pi \int_{-1}^{1} 4x^2 dx = \pi \left[\frac{4}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

8. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - e^{x^2}}{2x\cos(x) - \log(1 + 2x)}$$

med hjälp av MacLaurin utveckling. **(3p)**
Lösning: Från standardutvecklingarna får vi

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + x^2} &= 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4), \\ e^{x^2} &= 1 + x^2 + \mathcal{O}(x^4), \\ 2x\cos(x) &= 2x - x^3 + \mathcal{O}(x^4), \\ \log(1 + 2x) &= 2x - 2x^2 + \tfrac{8}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4), \end{aligned}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - e^{x^2}}{2x\cos(x) - \log(1 + 2x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4) - (1 + x^2 + \mathcal{O}(x^4))}{2x - x^3 + \mathcal{O}(x^4) - (2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4))} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)}{2x^2 - \frac{11}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x^2)}{2 - \frac{11}{3}x + \mathcal{O}(x^2)} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$