Anteckningar för kursen "Linjär Algebra"

Simone Calogero

Vecka 1

Viktig information. Dessa anteckningar är inte avsedda som en ersättning för kurs litteratur men bara som en kort sammanfattning av det som redovisas i föreläsningarna.

1 Vektorer

1.1 Geometrisk definition

Givna två punkter A, B i planet, eller i rummet betecknar vi med AB sträckan som ansluter A och B. Naturligtvis $AB = BA$. Men om vi vill också ange en riktning till denna sträcka då blir ordning viktig. Vi betecknar med $\overrightarrow{AB}$ den riktade sträckan från A till B (rita exempel).

Definition 1.1. *Varje riktad sträcka bestämmer en* **vektor**. *Två sträckor som är lika långa, parallella och lika riktade bestämmer samma vektor.*

Därför om $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ är parallella, lika långa och lika riktade identifierar $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ samma vektor, d.v.s, $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Med andra ord skiljer vi inte två vektorer som kan överlappas med parallellt transport (att parallellt transportera en sträcka betyder att vi rör sträckan runt i planet—eller i rummet—utan att ändra sin längd och riktning).

Anmärkningar:

1. Vi betecknar med V mängden av alla vektorer. Alltså skriver vi $\mathbf{u} \in V$ för att mena att $\mathbf{u}$ är en vektor. Tänk på vektorer som matematiska objekt med en exakt definition och V som mängden av dessa objekt (precis som $\mathbb{R}$ är mängden av alla matematiska objekt som vi kallar reella tal).

2. I boken betecknas vektorer med feta bokstäver, vilket naturligtvis kan inte göras på tavlan.

3. Om $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ då kan man (genom att parallellt transportera vektorerna) välja tre punkter A, B, C så att $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$. Alltså kan vi alltid anta att två (eller fler) vektorer har precis samma startpunkt.

4. Längden av vektorn $\mathbf{u}$ betecknas $\|\mathbf{u}\|$ (med två vertikalstreck). Den kallas också **norm** av $\mathbf{u}$. Carlsson betecknar normen of $\mathbf{u}$ med $|\mathbf{u}|$; Lay betecknar normen med $\|\mathbf{u}\|$. Vi använder notationen i Lays bok.

Om $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ sätter vi $-\mathbf{u} = \overrightarrow{BA}$, d.v.s, $-\mathbf{u}$ är den vektor som är lika lång som $\mathbf{u}$ men motsatt riktad mot $\mathbf{u}$ (Rita exempel).

När vi låter slutpunkten B bli närmare och närmare till A får vi en vektor med mindre och mindre norm. När $B \equiv A$ kallas den motsvarande vektorn **nollvektor** och betecknas $\mathbf{0}$. Notera att man kan inte definiera riktningen av nollvektorn. Nollvektorn är den enda vektorn med normen 0.

Notera att tills nu spelade det ingen roll om $\mathbf{u}$ är en vektor i planet eller i rummet. Detta kommer att vara viktigt senare.

1.2 Operationer på vektorer

Vi vet hur man adderar och multiplicerar reella tal. Nu ska vi lära oss hur man utför samma operationer med vektorer. Först definierar vi hur man multiplicerar en vektor med ett reellt tal.

Definition 1.2. *Om $t \in \mathbb{R}$ och $\mathbf{u} \in V$ så är $t\mathbf{u} \in V$ den vektor med normen $\|t\mathbf{u}\| = |t|\|\mathbf{u}\|$, då $|t|$ är absolutbeloppet av t, och som är lika riktad som $\mathbf{u}$ om $t > 0$ och motsatt riktad mot $\mathbf{u}$ om $t < 0$. När $t = 0$ är $t\mathbf{u} = 0u = \mathbf{0}$ (nollvektorn).*

VAR FÖRSIKTIG! I uttrycket $0u = \mathbf{0}$ är 0 på vänstra sidan reella talen noll, medan $\mathbf{0}$ som står på högra sidan är nollvektorn.

Multiplikation mellan vektorer och reella tal har en enkel geometrisk tolkning (rita exempel). I själva verket, om $\mathbf{u}$ är en vektor då är $\{t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$ mängden av alla vektorer som är parallella med $\mathbf{u}$.

Nu definierar vi vektorers addition.

Definition 1.3. *Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Välj tre punkter A, B, C så att $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$. Då är $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$. Subtraktion av vektorerna $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ges av $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.*

Rita exempel. För att beräkna $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ ritar vi först $-\mathbf{v}$ och då addera $\mathbf{u}$ (rita exempel).

Alternativ definition (**parallellogram regel**). Välj A, B, C så att $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$ och konstruera parallellogrammen ABCD med parallella sidor AB och AC. Då är $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$ (parallellograms diagonalen).

För att addera tre vektorer, säg $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$, adderar man först $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ och då till resultatet $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ adderar man $\mathbf{w}$.

Man kan verifiera att addition av vektorer uppfyller de följande reglarna, för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ och $s, t \in \mathbb{R}$.

(1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (kommutativitet)

(2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (associativitet)

(3) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(4) $t(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ (distributivitet)

(5) $(s + t)\mathbf{u} = s\mathbf{u} + t\mathbf{u}$ (distributivitet)

(6) $s(t\mathbf{u}) = (st)\mathbf{u}$

Notera att + i regel (5) betyder två olika saker på vänstra och högra sidan. Om vi skulle vilja vara precis borde vi använda en annan symbol (ej +) för att beteckna vektorer addition, eftersom symbolen + redan används för additionen av reella tal.

2 Baser och koordinater

Definition 2.1. *Två vektorer sägs vara* **ortogonala** *om de bildar en 90 graders vinkel (RITA). Vi skriver* $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ *om vektorn* $\mathbf{u}$ *är ortogonal mot* $\mathbf{v}$.

Definition 2.2. *Två icke-noll vektorer i planet* $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ *utgör en* **bas** *för planet om de inte är parallella. Om* $\mathbf{e_1} \perp \mathbf{e_2}$ *och* $\|\mathbf{e_1}\| = \|\mathbf{e_2}\| = 1$ *då kallas* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ **ortonormerad** *bas.*

Nu visar vi att när vi fixar en bas för planet då är varje vektor $\mathbf{u}$ i planet identifieras av en par av reella tal, som kallas **koordinater** av $\mathbf{u}$ i den givna basen.

Sats 2.1. *Låt* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ *vara en bas i planet. För varje vektor* $\mathbf{u}$ *finns det unika* $x, y \in \mathbb{R}$ *så att*

$$\mathbf{u} = x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2}.$$

Talen x, y *kallas koordinater av* u *i basen* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$.

Bevis: Rita en bild.

I följande antar vi att en (vanligtvis ortonormerad) bas $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ för planet har bestämts och därför varje vektor i planet kan identifieras på ett entydigt sätt med sina komponenterna. Vi skriver $\mathbf{u} = (x, y)$ för att mena att $\mathbf{u} = x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2}$. Ett annat vanligt sätt för att beteckna komponenterna av $\mathbf{u}$ är u_1, u_2, d.v.s., $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e_1} + u_2\mathbf{e_2}$, så att vi vet att u_1 är koordinaten av $\mathbf{u}$ längs $\mathbf{e_1}$ och u_2 är koordinaten längs $\mathbf{e_2}$.

Nu visar vi hur man gör vektors operationer komponentvis.

Sats 2.2. *Om* $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e_1} + u_2\mathbf{e_2}$, *d.v.s,* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, *och* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, *och* $t \in \mathbb{R}$, *så gäller*

$$t\mathbf{u} = t(u_1, u_2) = (tu_1, tu_2), \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

Ge ett exempel.

Eftersom varje vektor i planet unikt identifieras med två reella talen (efter en bas har valts) betecknar vi med $\mathbb{R}^2$ mängden av alla vektorerna i planet (tvådimensionella vektorer). Notera att, enligt Pythagoras sats,

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2.$$

Nu betraktar vi baser i rummet.

Definition 2.3. *Tre vektorer* $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ *utgör en bas i rummet om de inte ligger i ett plan. Om dessutom* $\mathbf{e_1} \perp \mathbf{e_2}$*,* $\mathbf{e_2} \perp \mathbf{e_3}$ *och* $\|\mathbf{e_1}\| = \|\mathbf{e_2}\| = \|\mathbf{e_3}\| = 1$ *kallas* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ *för ortonormerad bas.*

Ortonormerade baser delar upp i **högerorienterade** och **vänsterorienterade**. I första fallet pekar $\mathbf{e_1}$ som tumme, $\mathbf{e_2}$ som pekfinger och $\mathbf{e_3}$ som långfinger på **högre hand**. I andra fallet gör man samma identifikationen med vänster hand.

Definition 2.4. *Vi säger att* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ *är en* **standardbas** *i rummet om* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ *är en högerorienterade ortonormerad bas.*

Rita exempel.

Sats 2.3. *Låt* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ *vara en bas i rummet (inte nödvändigt ortonormerad). För varje vektor* $\mathbf{u}$ *finns det unika* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *så att*

$$\mathbf{u} = x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2} + z\mathbf{e_3}.$$

Talen x, y, z *kallas för koordinater av* u *i basen* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$.

Vi skriver $\mathbf{u} = (x, y, z)$, eller $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Precis som förut har vi

$$t(u_1, u_2, u_3) = (tu_1, tu_2, tu_3), \quad (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3).$$

Vi antar alltid att en (vanligtvis standard) bas i rummet har fixats och betecknar med $\mathbb{R}^3$ mängden av alla vektorer i rummet (tredimensionella vektorer). Det gäller

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}, \quad u \in \mathbb{R}^3.$$