

# Anteckningar för kursen "Linjär Algebra"

Simone Calogero

Vecka 4

**Viktig information.** Dessa anteckningar är inte avsedda som en ersättning för kurs litteratur men bara som en kort sammanfattning av det som redovisas i föreläsningarna.

## 1 n-dimensionella vektorer

Vi såg att man kan bestämma en ortonormerad bas i planet och identifiera vektorer i planet med par av reella tal  $(x, y)$ . I den här representationen ges vektorerna i basen av  $(0, 1), (1, 0)$ . På grund av detta brukar man beteckna med  $\mathbb{R}^2$  mängden av alla vektorer i planet:

$$\mathbb{R}^2 = \{\text{vektorer i planet}\} = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

På liknande sätt har vi

$$\mathbb{R}^3 = \{\text{vektorer i rummet}\} = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

och  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$  utgör en bas i  $\mathbb{R}^3$ . Vi kan nu generalisera detta till **n-dimensionella vektorer**.

**Definition 1.1.** *Ett uttryck av formen  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ , då  $u_1 \in \mathbb{R}, u_2 \in \mathbb{R}, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ , kallas n-dimensionell vektor med koordinater  $u_1, \dots, u_n$ . Mängden av alla n-dimensionella vektorer betecknas med  $\mathbb{R}^n$ . Vektorerna*

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

*sägs utgöra en ortonormerad bas (ON bas) i  $\mathbb{R}^n$ .*

Operationerna mellan n-dimensionella vektorer definieras i koordinater precis som i planet ( $n = 2$ ) och i rummet ( $n = 3$ ). Till exempel

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad a \in \mathbb{R} \Rightarrow a\mathbf{u} = (au_1, a_2, \dots, au_n)$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

Det är också användbart att åskådliggöra vektorer som matriser, till exempel

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (\text{kolumnvektor})$$

$$\mathbf{u} = (u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n) \quad (\text{radvektor})$$

## 2 Linjära ekvationssystem

Vi börjar med system av 2 ekvationer i 2 variabler.

### Exempel 1

Betrakta ekvationssystemet

$$x - 2y = -1 \quad (1)$$

$$-x + 3y = 3 \quad (2)$$

I detta system kallas  $x, y$  variabler eller **obekanta**. Vi vill bestämma värdena av  $x, y$  så att de två ekvationerna uppfylls samtidigt. Genom att addera (1) och (2) får vi

$$(x - 2y) + (-x + 3y) = -1 + 3$$

d.v.s.,  $y = 2$ . Om vi sätter nu  $y = 2$  i (1) (eller i (2)) får vi  $x = 3$ . Alltså har systemet (1)-(2) endast en lösning som ges av  $(x, y) = (3, 2)$ . Notera att lösningen kan tolkas som en 2-dimensionell vektor. Dessutom motsvarar lösningen  $(x, y) = (3, 2)$  till koordinaterna av skärningspunkten mellan räta linjerna med ekvationer (1), (2), d.v.s.,

$$y = \frac{x+1}{2}, \quad y = \frac{x+3}{3}. \quad (\text{Rita figur})$$

### Exempel 2

Betrakta nu

$$x - 2y = -1 \quad (3)$$

$$-x + 2y = 3 \quad (4)$$

Om vi nu adderar de två ekvationerna får vi  $0 = 2$ , som är falskt! Det innebär att ekvationssystemet (3)-(4) saknar lösning: det finns inget par av reella tal  $x, y$  som uppfyller båda ekvationerna samtidigt. Geometriskt betyder det att räta linjerna som motsvarar dessa två ekvationer är parallella med varandra och därmed har ingen skärningspunkt. (RITA FIGUR)

### Exempel 3

Slutligen betrakta systemet

$$x - 2y = -1 \quad (5)$$

$$-x + 2y = 1 \quad (6)$$

Om vi multiplicerar (6) med  $-1$  får vi

$$(6) \Leftrightarrow x - 2y = -1$$

alltså är (6) precis samma ekvation som (5). Eftersom vi har endast en ekvation men två variabler kan en av obekanta väljas fritt, t. ex.,  $x$  =fri, och  $y$  ges av  $y = (1 + x)/2$ . Därmed är

$$x = t, \quad y = \frac{1 + t}{2}$$

en lösning till (5)-(6) för alla reella tal  $t \in \mathbb{R}$ . Geometriska tolkningen är naturligtvis att ekvationerna (5)-(6) beskriver samma räta linjen.

### Allmänna $2 \times 2$ linjära ekvationssystem

I allmänhet har ett  $2 \times 2$  linjär ekvationssystem (2 ekvationer i 2 variabler) formen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \quad (7)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \quad (8)$$

där  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$  är *givna* reella tal och  $x_1, x_2$  är obekanta. Notera att  $a_{11}$  är koefficienten till  $x_1$  i ekvation 1,  $a_{12}$  är koefficienten till  $x_2$  i ekvation 1 och så vidare. Låt oss nu införa kolumnvektorer

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

och  $2 \times 2$  matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Notera att i matrisen  $A$  är  $a_{11}$  elementet i raden 1 kolumnen 1,  $a_{12}$  är elementet i raden 1 kolumnen 2, och så vidare. Systemet (7)-(8) kan omskrivas i **matrisformen** som

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Vänstra delen av föregående ekvationen kallas för **matrisprodukten** mellan  $A$  och  $\mathbf{x}$ :

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

Vi ska införa senare allmänna definitionen av matrisprodukt. Notera att produkten av  $2 \times 2$  matrisen  $A$  och  $2 \times 1$  matrisen  $\mathbf{x}$  är en  $2 \times 1$  matris.

**Sats 2.1.** Låt  $A$  vara en  $2 \times 2$  matris och  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$  en vektor. Ekvationssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

har en unik lösning  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  om och endast om  $\det A \neq 0$ .

Beviset lämnas som uppgift. Vi ska bevisa senare en mer generell sats

## 2.1 Allmänna definition av linjärt ekvationssystem

**Definition 2.1.** Ett linjärt ekvationssystem av  $m$  ekvationer i  $n$  variabler är en uppsättning av  $m$  linjära ekvationer med formen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

då  $a_{ij}$ , och  $b_i$ , för  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  är reella tal, medan  $x_1, \dots, x_n$  kallas för obekanta. På matrisformen skrivs detta system som

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

då  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{b}$  är kolumnvektorer

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

och  $A$  är  $m \times n$  matrisen ( $m$  rader,  $n$  kolumner)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Den  $m \times (n + 1)$  matrisen ges av

$$(A \ \mathbf{b}) = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

kallas för **totalmatrisen** av ekvationssystemet.

### 3 Exempel på $3 \times 3$ ekvationssystem

Ett linjärt ekvationssystem kan ha precis en lösning, ingen lösning eller oändliga många lösningar (se exempel ovan för  $2 \times 2$  system). Här presenteras exempel på dessa 3 situationer för  $3 \times 3$  system.

#### Exempel på $3 \times 3$ system med unik lösning

$$\begin{aligned} 3x_1 & & +x_3 & = 1 \\ -x_1 & +4x_2 & +x_3 & = 4 \\ x_1 & +x_2 & & = 0 \end{aligned}$$

Notera att om en variabel inte förekommer i en ekvation lämnar vi en tom plats. I själva verket kan systemet skrivas om

$$3x_1 + 0x_2 + x_3 = 1 \quad (9)$$

$$-x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \quad (10)$$

$$x_1 + x_2 + 0x_3 = 0 \quad (11)$$

På detta vis får man omedelbart matrisformen av system:  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , då

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Totalmatrisen är

$$(A \ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Vi löser systemet (9)-(11) med **Gausselimination** metoden. Först adderar vi ekvationerna (10)-(11):

$$(10) + (11) \equiv 5x_2 + x_3 = 4 \quad (13)$$

I denna nya ekvation finns variabeln  $x_1$  inte. Om vi ersätter (11) med (13) får vi systemet

$$3x_1 + 0x_2 + x_3 = 1 \quad (14)$$

$$-x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \quad (15)$$

$$0x_1 + 5x_2 + x_3 = 4 \quad (16)$$

Systemet (14)-(16) sägs vara **ekvivalent** till systemet (9)-(11), eftersom  $(x_1, x_2, x_3)$  är en lösning till (9)-(11) om och endast om  $(x_1, x_2, x_3)$  är en lösning till (14)-(16). Nu ersätter vi (15) med  $3(15) + (14)$  och så får vi det ekvivalenta systemet

$$3x_1 + 0x_2 + x_3 = 1 \quad (17)$$

$$0x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 13 \quad (18)$$

$$0x_1 + 5x_2 + x_3 = 4 \quad (19)$$

Notera att vi har eliminerat variabeln  $x_1$  från andra ekvationen. Nu eliminerar vi variabeln  $x_2$  från (19) genom att ersätta (19) med  $\frac{12}{5}(19) - (18)$  och på detta sätt får vi ekvivalenta systemet

$$3x_1 + 0x_2 + x_3 = 1 \quad (20)$$

$$0x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 13 \quad (21)$$

$$0x_1 + 0x_2 - \frac{8}{5}x_3 = -\frac{17}{5} \quad (22)$$

Slutligen ersätter vi (22) med  $\frac{5}{8}(22)$  och får

$$3x_1 + 0x_2 + x_3 = 1 \quad (23)$$

$$0x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 13 \quad (24)$$

$$0x_1 + 0x_2 + x_3 = \frac{17}{8} \quad (25)$$

Från (25) läser man direkt värdet av  $x_3$ , nämligen  $x_3 = -\frac{17}{8}$ ; från (24) får nu man

$$x_2 = \frac{1}{12}\left(13 - 4\frac{17}{8}\right) = \frac{3}{8}$$

och slutligen från (23) får vi

$$x_1 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{17}{8}\right) = -\frac{3}{8}$$

Alltså lösningen ges av  $(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{8}(-3, 3, 17)$ . Notera att totalmatrisen till systemet (23)-(25) ges av

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{8} \end{pmatrix} \quad (26)$$

I allmänhet kallas en  $3 \times 4$  matris en **trappstegsmatris** om matrisen har formen

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Här kan  $*$  vara vilka reella tal som helst. När totalmatrisen är trappsteg kan man omedelbart hitta lösningen, som visas i exemplet ovan.

Notera att alla operationer på ekvationerna som reducerade systemet (9)-(11) till ekvivalenta systemet (23)-(25) motsvarar operationer om raderna av totalmatrisen (12) som reducerade (12) till trappstegsmatris (26), d.v.s.,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{II} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 4 & 13 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{5} & -\frac{17}{5} \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{IV} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{8} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

I steget  $I$  ersätter vi tredje raden med summa av andra och tredje raden. Matrisen som vi får är totalmatrisen av systemet (14)-(16). I steget  $II$  ersätter vi andra raden med tre gånger andra raden plus första raden. Den resulterande matrisen är totalmatrisen av systemet (17)-(19). I steget  $III$  ersätter vi tredje raden med  $\frac{12}{5}$  tredje raden minus andra raden och får totalmatrisen för (20)-(22). I steget  $IV$  ersätter vi tredje raden med  $-\frac{5}{8}$  gånger tredje raden och på detta sätt för vi en trappstegsmatrix som är totalmatrisen för (23)-(25). Vid denna punkt får lösningen till ekvationssystem räkna ut direkt, som visades ovan.

Sammanfattningsvis kan ekvationssystem lösas genom att reducera totalmatrisen till trappsteg form. För detta får man göra följande **linjära operationer**:

1. Multiplicera rader med en konstant skild från noll
2. Addera rader
3. Ersätta en rad med en annan som erhålls genom 1 och 2
4. Byta plats på rader

**Uppgift 3.1.** Lös ekvationssystemet

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \quad 2x_1 - 1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \quad 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1$$

genom att reducera totalmatrisen till trappsteg form.

Det är klart från exemplet studeras i detta avsnitt att ett  $3 \times 3$  ekvationssystem har en och endast en lösning om totalmatrisen kan reduceras till en trappstegsmatrix av formen

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

### Exempel på $3 \times 3$ system med ingen lösning

Betrakta nu ekvationssystem

$$\begin{aligned} x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \quad (*) \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Totalmatrisen är

$$(A \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Genom linjära operationer kan man reducera totalmatrisen till den följande trappstegsmatrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

(vi använder  $\sim$  för att mena att den andra matrisen erhålls från den första med linjära operationer). Därför är ekvationssystemet (\*) ekvivalent till den följande:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & -3x_2 & -2x_3 = 1 \\ & x_2 & -4x_3 = 8 \quad (**) \\ & & 0 = 15 \end{array}$$

Notera att vi erhåll den falska ekvationen  $0 = 15$ , vilket betyder att systemet ovan *inte ha någon lösning*. Detta exempel visar att *ett  $3 \times 3$  ekvationssystem saknar lösningar om och endast om totalmatrisen kan reduceras till en trappstegsmatris av formen*

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{då } a \neq 0.$$

### Exempel på $3 \times 3$ system med oändligt många lösningar

$$\begin{array}{rcl} x_1 & -4x_2 & = 4 \\ x_1 & +4x_2 & +x_3 = 3 \quad (**) \\ 2x_1 & & +x_3 = 7 \end{array}$$

Totalmatrisen uppfyller

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Därför är ekvationssystemet (\*\*) ovan ekvivalent till det följande  $2 \times 3$  ekvationssystem

$$\begin{array}{rcl} x_1 & -4x_2 & = 4 \\ & 8x_2 & +x_3 = -1 \quad (***) \end{array}$$

Detta system har naturligtvis oändligt många lösningar, eftersom det finns 3 variabler men bara 2 ekvationer. För att ange lösningarna kan vi t. ex. välja  $x_3$  fritt, d.v.s.,

$$x_3 = t \quad (\text{vilket reellt tal } t \text{ som helst})$$



och härleda  $x_2, x_3$  från  $(***)$ :

$$x_1 = 4 - \frac{1+t}{2}, \quad x_2 = -\frac{1+t}{8}$$

Från detta exempel är det klart att *ett  $3 \times 3$  ekvationssystem har oändligt många lösningar om totalmatrisen kan reduceras till en trappstegsmatris av formen*

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ANM: Om totalmatrisen kan reduceras till en trappstegsmatris med två noll rader då kan man välja två variabler fritt! Se nästa uppgift.

**Uppgift 3.2.** *Hitta alla lösningar till ekvationssystemet*

$$x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \quad -x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \quad 3x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 6$$

Vi har den följande analog av satsen 2.1:

**Sats 3.1.** *Låt  $A$  vara en  $3 \times 3$  matris och  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ . Ekvationssystemet  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  has en unik lösning  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  om och endast om  $\det A \neq 0$ .*