Anteckningar för kursen "Linjär Algebra"

Simone Calogero

Vecka 6

Viktig information. Dessa anteckningar är inte avsedda som en ersättning för kurs litteratur men bara som en kort sammanfattning av det som redovisas i föreläsningarna.

1 Linjärt oberoende vektorer

Definition 1.1. *Låt* $\mathbf{a_1}, \dots, \mathbf{a_n} \in \mathbb{R}^m$. *Om* $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ *är den enda lösningen till vektor ekvation*

$$x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + \dots + x_n\mathbf{a_n} = \mathbf{0} \tag{1}$$

så sägs vektorerna $\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_n}$ *vara* **linjärt oberoende**.

Notera att systemet (1) kan skrivas i matrisformen som $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, då

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

och A är $m \times n$ matrisen vars kolumner utgörs av vektorer $\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_n}$. Det vill säga, om

$$\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots \quad \mathbf{a_n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

är koordinater av vektorerna $\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_n}$ då är

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Därför är $\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_n}$ linjärt oberoende om och endast om $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är den enda lösningen till homogent ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Exempel 1. Bestäm om vektorerna

$$\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

är linjärt oberoende. Vi studerar ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, då $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ och

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Totalmatrisen är

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och kan radreduceras till

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Från här läser vi strax att $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är den enda lösningen. Därför är $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ linjärt oberoende.

Exempel 2. Bestäm om vektorerna

$$\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

är linjärt oberoende. Vi studerar ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, då $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ och

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Eftersom vi har tre variabler men bara två ekvationer är det klart att en variabel kan välja fritt. I själva verket har vi följande uppenbara satsen:

Sats 1.1. *Om $\mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_n} \in \mathbb{R}^m$ är linjärt oberoende då måste $n \leq m$.*

Alltså tre 2-dimensionella vektorer kan aldrig vara linjärt oberoende.

Exempel 3. Bestäm om vektorerna

$$\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

är linjärt oberoende. Matrisen A vars kolumner utgörs av vektorerna $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ ges av

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Eftersom $\det A = 0$ då är $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ inte den enda lösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och därmed vektorerna är inte linjärt oberoende.

Som visas av exempel 3, i fallet att matrisen A är 3×3 då är vektorerna i kolumnerna av A linjärt oberoende om och endast om $\det A \neq 0$. Denna egenskap gäller för alla kvadratmatriser (d.v.s., $n \times n$ matris).

Sats 1.2. *Vektorerna $\mathbf{a_1}, \ldots \mathbf{a_n} \in \mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende om och endast om $\det A \neq 0$, då A är den $n \times n$ matrisen vars kolumner utgörs av vektorerna $\mathbf{a_1}, \ldots \mathbf{a_n}$.*

Notera att hittills har vi diskuterat endast determinanten av 2×2 och 3×3 matriser. Vi visar nu hur man beräknar determinanten av 4×4 matriser. Från detta får man lätt begripa allmänna formeln för determinanten av $n \times n$ (som ska införs senare i kursen).

Definition 1.2. *Låt*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Då är

$$\det A = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$
$$+ a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix} - a_{14} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

Notera att determinanten som multiplicerar a_{11} är determinanten till matrisen erhålls av A genom att eliminera den *första* raden och den *första* kolumnen; determinanten som multiplicerar a_{12} är determinanten till matrisen erhålls av A genom att eliminera den *första* raden och den *andra* kolumnen, och så vidare. Varje term förekommer med alternerande tecken, $+1, -1, +1, -1$.

Exempel 4. Bestämma om vektorerna

$$\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

är linjärt oberoende. Vi skapar matrisen med kolumner $\mathbf{a_1}, \ldots \mathbf{a_4}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi har

$$\begin{aligned} \det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ = 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-2) - 2(-6) = 14 \neq 0 \end{aligned}$$

därmed är vektorerna $\mathbf{a_1}, \ldots \mathbf{a_4}$ linjärt oberoende.

2 Linjära avbildningar

Vi såg att resultatet av att multiplicera en $m \times n$ matris A med en $n \times 1$ kolumnvektor är en $m \times 1$ vektor. Om matrisen A är given och vi utför denna operation med alla vektorer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ då får vi en regel för att transformera n-dimensionella vektorer till m-dimensionella vektorer.

Definition 2.1. *En funktion $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sägs vara linjär (eller en* **linjär avbildning***) om*

$$T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})$$

gäller för alla reella tal $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ och vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Det är klart att, given en $m \times n$ matris A, funktionen

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

är en linjär avbildning. Värdemängden av en funktion $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definieras som vanligt, d.v.s.,

$$V_T = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m : \text{ det finns } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ så att } T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\}$$

För $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ är $\mathbf{b} \in V_T$ om och endast om det finns $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ så att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, d.v.s., $\mathbf{x}$ är en lösning till $m \times n$ ekvationssystemet med totalmatrisen $(A\ \mathbf{b})$.

Exempel. Bestäm om $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ finns is värdemängden av linjär avbildning $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ då

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi måste bestämma om $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösningar. Totalmatrisen ges av

$$(A\ \mathbf{b}) = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vi har

$$(A\ \mathbf{b}) \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Från denna trappsteg form härleder vi att ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har (en unik) lösning och därmed $\mathbf{b} \in V_T$.

Linjära avbildningar beskrivs av kvadratmatriser är särskild viktiga. Till exempel, given $\theta \in [0, 2\pi]$, betrakta $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, då

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Då är

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{pmatrix}$$

Med hjälp av en figur (rita) kan man se att vektorn $\mathbf{y}$ med koordinater $y_1 = x_1\cos\theta - x_2\sin\theta$, $y_2 = x_1\sin\theta + x_2\cos\theta$ erhålls av $\mathbf{x}$ genom en rotation av θ grader. Därför är linjära avbildningen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ transformationen som roterar alla punkter i planet.