Kryssupgifter veckan 2

Viktig: använd ett blad per uppgift!

1. Skissera grafen till polynomet $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$. För vilka värden av $x \in \mathbb{R}$ gäller det att $p(x) \leq 0$?

2. Hitta skärningspunkterna mellan parabeln $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ och räta linjen $y = x + \frac{1}{2}$. Visa resultatet på ett koordinatsystem.

3. Rita upp parallellogrammen som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u} = (2, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 4)$ och bestäm vektorn $\mathbf{w}$ som utgörs av diagonalen. Visa (utan räknare!) att $\|\mathbf{w}\| < \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

4. Bestäm vektorn $\mathbf{u}$ som har normen 4, är parallell med vektorn $\mathbf{v} = (1, -2, -2)$ och är motsatt riktad mot $\mathbf{v}$.

Lösningar

1. Grafen till $p(x)$ är en parabel med uppåt konkavitet (eftersom koefficienten till x^2 är positiv). Parabeln skär y-axel i punkten $(0, 1)$ (eftersom $p(0) = 1$) och x-axeln i punkterna $(x_-, 0)$, $(x_+, 0)$, då $x_\pm$ är lösningarna till andragradsekvation $p(x) = 0$, d.v.s.,
$$x_\pm = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \Rightarrow x_+ = 1,\ x_- = \frac{1}{2}.$$
Parabeln har en minimum då $p'(x) = 0$, d.v.s., $4x - 3 = 0$. Därmed ligger minimum i punkten $(\frac{3}{4}, p(\frac{3}{4})) = (3/4, -1/8)$. $p(x) \leq 0$ gäller för $1/2 \leq x \leq 1$.

2. x-koordinaten till skärningspunkterna hittas genom att lösa
$$\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = x + \frac{1}{2}, \text{ d.v.s., } x^2 + 2x + 1 = 0.$$
Eftersom $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ finns det endast en skärningspunkt vid $(-1, -1/2)$. Därför är räta linjen tangent till parabeln.

3. Enligt parallellograms regel ges diagonalen av $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (2,1) + (0,4) = (2,5)$. Alltså
$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$
Dessutom $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{5}$ och $\|\mathbf{v}\| = 4$, därmed är $\|\mathbf{w}\| < \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ olikheten
$$\sqrt{29} < \sqrt{5} + 4, \text{ d.v.s. } \sqrt{29} - \sqrt{5} < 4.$$
Om vi kvadrerar en gång får vi $29 + 5 - 2\sqrt{29}\sqrt{5} < 16$, d.v.s., $9 < \sqrt{29 \cdot 5}$. Om vi kvadrerar en gång till får vi $81 < 145$, som är sant. Därmed uppfylls olikheten $\|\mathbf{w}\| < \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

4. Eftersom $\mathbf{u}$ är parallell med $\mathbf{v}$ då måste $\mathbf{u}$ har formen $t\mathbf{v}$, för något reellt tal $t \in \mathbb{R}$. Därför är $\|\mathbf{u}\| = |t|\|\mathbf{v}\| = |t|\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = 3|t|$. Alltså $\|\mathbf{u}\| = 4$ ger $|t| = 4/3$ och eftersom $\mathbf{u}$ är motsatt riktad mot $\mathbf{v}$ då måste $t < 0$. Därför $t = -4/3$ och $\mathbf{u} = -4\mathbf{v}/3$.