Kryssupgifter veckan 3

Viktig: använd ett blad per uppgift!

1. Låt $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ och $q(x) = x^3 - x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$. Bestäm den största möjliga definitionsmängden till rationella funktionen $f(x) = p(x)/q(x)$.

2. Lös $x^2 + 2|x + 2| - 3 \geq 0$.

3. Låt $\mathbf{u} = (2, -3, 0)$ och $\mathbf{v} = (1, 0, -\frac{1}{2})$ i en ortonormerad bas i rummet. Bestäm en vektor $\mathbf{w}$ så att $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$, $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ och $\|\mathbf{w}\| = 1$

4. Låt $\mathbf{u} = (1, 4, -2)$ och $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$ i en ortonormerad bas i rummet. Bestäm vinkeln $\theta \in [0, \pi]$ mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ och den ortogonala projektion av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$.

Lösningar

1. Innan vi kan bestämma definitionsmängden måste vi förkorta funktionen f. Vi har

$$f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x(x^2 - x - 2)}$$

Eftersom $x^2 - x - 2 = 0$ för $x = 2$ och $x = -1$ då är $x^2 - x - 2 = a(x - 2)(x + 1)$, för något reellt tal $a \in \mathbb{R}$. Notera att a är lika med koefficienten till x^2 i polynomet $a(x - 2)(x + 1)$. Denna koefficient måste lika motsvarande koefficienten i polynomet $x^2 - x - 2$, d.v.s., $a = 1$. Därmed $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$. Låt nu $y = x^2$ i polynomet $p(x)$. Då får vi andragradspolynom $y^2 - 5y + 4$, vilket kan skrivas som $(y - 4)(y - 1)$. Därmed är $p(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1) = (x + 2)(x - 2)(x - 1)(x + 1)$. Därför

$$f(x) = \frac{(x + 2)(x - 2)(x - 1)(x + 1)}{x(x - 2)(x + 1)} = \frac{(x + 2)(x - 1)}{x}.$$

Det följer att den största möjliga definitionsmängden till f är lika med $x \neq 0$, d.v.s., $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

2. Vi har $|x + 2| = x + 2$ för $x \geq -2$ och $|x + 2| = -x - 2$ för $x < -2$. För $x \geq -2$ blir olikheten

$$x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

Eftersom $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ är föregående olikheten uppfylls för alla $x \geq -2$. För $x < -2$ får vi olikheten

$$x^2 - 2x - 7 \geq 0.$$

Eftersom $x^2 - 2x - 7 = 0$ för $x = 1 \pm 2\sqrt{2}$ då uppfylls föregående olikheten för $x \leq 1 - 2\sqrt{2}$ och $x \geq 1 + 2\sqrt{2}$. Men $1 - 2\sqrt{2} > -2$ och därmed olikheten $x^2 - 2x - 7 \geq 0$ uppfylls för alla $x < -2$. Vi drar slutsatsen att $x^2 + 2|x+2| - 3 \geq 0$ gäller för alla $x \in \mathbb{R}$.

3. Låt $\mathbf{w} = (x, y, z)$. Kraven $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$ och $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ innebär att skalärprodukterna

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 2x - 3y, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = x - \frac{1}{2}z$$

är lika med noll. Därmed $y = \frac{2}{3}x$ och $z = 2x$. Så är

$$\|\mathbf{w}\| = \|(x, \frac{2}{3}x, 2x)\| = \sqrt{x^2 + \frac{4}{9}x^2 + 4x^2} = \sqrt{\frac{49}{9}x^2} = \frac{7}{3}|x|$$

och $\|\mathbf{w}\| = 1$ ger $x = \pm 3/7$. Notera att det finns två möjliga val för $\mathbf{w}$, nämligen

$$\mathbf{w} = \pm(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7})$$

Alternativ lösning. Beräkna $\mathbf{q} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ och sätta $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}$ (eller $\mathbf{w} = -\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}$).

4. Å ena sidan,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1, 4, -2) \cdot (2, 1, -1) = 2 + 4 + 2 = 8.$$

Å andra sidan

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \cos\theta = \sqrt{126} \cos\theta.$$

Därmed $\sqrt{126}\cos\theta = 8$, d.v.s.,

$$\theta = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{126}}\right)$$

Ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$ ges av

$$\mathbf{v}_{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u} = \frac{8}{21}\mathbf{u}$$