Kryssuppgifter veckan 4

Viktig: använd ett blad per uppgift!

1. Bestäm i vilka intervallen är funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv, då
$$f(x) = |x^2 - 1|$$
Hitta inversen till f i varje intervallet då f är injektiv. TIP: Skissera grafen av f och kolla i vilka intervallen är f strängt växande/avtagande.

2. Skissera graferna av $p \circ H$ och $H \circ p$ då H är stegfunktionen[1] och p är polynomet $p(x) = x^2 - x - 6$.

3. Låt $\mathbf{u} = (1, 2, 0)$ och $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$ i en ortonormerad bas i rummet. Bestäm en vektor $\mathbf{w}$ så att $\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{v}$ och $\|\mathbf{w}\| = 1/\sqrt{5}$.

4. Låt $\mathbf{u} = (1, -2, -1)$, $\mathbf{v} = (4, -2, -3)$, $\mathbf{w} = (1, 1, -4)$ i en ortonormerad bas. Bestäm volymen till parallellepipeden som spänns upp av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$.

Lösningar

1. För att skissera grafen till f ritar vi först parabeln $y = x^2 - 1$ och sedan speglar vi den negativa delen av grafen kring $x-$axeln. Funktionen f är injektiv i intervallen då f är strängt avtagande eller strängt växande. Från ritade grafen ser man att f är injektiv i intervallen
$$I_1 = (-\infty, -1], \quad I_2 = [-1, 0], \quad I_3 = [0, 1], \quad I_4 = [1, \infty).$$
I vart och ett intervall hittar vi invers till f genom att lösa $|x^2 - 1| = y$. I intervallen I_1 och I_4 är $x^2 - 1 > 0$ och därmed blir $|x^2 - 1| = y$ ekvationen $x^2 - 1 = y$, d.v.s., $x = \pm\sqrt{1 + y}$. Notera att $y \geq 0$ i hela värdemängden av f och därmed $y \geq 0$ i definitionsmängden av f^{-1} i varje intervall. Eftersom $x < 0$ i I_1 och $x > 0$ i I_4 då får vi
$$f^{-1}(y) = -\sqrt{1 + y} \quad \text{i } I_1, \quad f^{-1}(y) = \sqrt{1 + y} \quad \text{i } I_4$$

[1] $H : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to \{0, 1\}, \quad H(x) = 0$ om $x < 0$ och $H(x) = 1$ om $x > 0$.

För $x \in I_2 \cup I_3$ blir $|x^2 - 1| = y$ ekvationen $1 - x^2 = y$, d.v.s., $x = \pm\sqrt{1-y}$. Notera att $0 \leq y \leq 1$ i värdemängden av f då $-1 \leq x \leq 1$ och därmed $0 \leq y \leq 1$ i definitionsmängden av f^{-1} i I_2 eller I_3. Eftersom $x \leq 0$ i I_2 och $x \geq 0$ i I_3 då får vi

$$f^{-1}(y) = -\sqrt{1-y} \quad \text{i } I_2, \quad f^{-1}(y) = \sqrt{1-y} \quad \text{i } I_3$$

Notera noggrant att f *inte är inverterbar i hela sin definitionsmängd!* f kan inverteras endast efter vi begränsar funktionen på ett av intervallen I_1, I_2, I_3, I_4.

2. Vi har

$$(p \circ H)(x) = p(H(x)) = H(x)^2 - H(x) - 6 = \begin{cases} 1 - 1 - 6 = -6 & \text{då } x > 0 \\ 0 - 0 - 6 = -6 & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

d.v.s., $(p \circ H)(x) = -6$, för $x \neq 0$; funktionen $p \circ H$ inte definieras för $x = 0$.

$$(H \circ p)(x) = H(p(x)) = H(x^2 - x - 6)$$

Eftersom $p(x) < 0$ för $-2 < x < 3$, och $p(x) > 0$ för $x < -2$ eller $x > 3$, då har vi

$$(H \circ p)(x) \begin{cases} 0 & \text{för } x \in (-2, 3) \\ 1 & \text{för } x \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty) \end{cases}$$

Funktionen $H \circ p$ definieras inte för $x = -2, 3$.

3. Låt $\mathbf{w} = (x, y, z)$. Då är

$$\mathbf{u} \times \mathbf{w} = (u_2 w_3 - u_3 w_2, u_3 w_1 - u_1 w_3, u_1 w_2 - u_2 w_1) = (2z, -z, y - 2x).$$

Kravet $\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{v}$ ger $z = 0$ och $y - 2x = 1$. Därför $\mathbf{w} = (x, 1 - 2x, 0)$ och $\mathbf{w} = 1/\sqrt{5}$ innebär

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \frac{1}{5} = x^2 + (1 - 2x)^2 \Rightarrow 5x^2 - 4x + 4/5 = 0.$$

Därmed $x = 2/5$, och $\mathbf{w} = (2/5, 1/5, 0)$.

4. Volymen till parallellepipeden ges av $|\det A|$ (absolutbeloppet av $\det A$) då A är 3×3 matrisen vars rader ges av vektorerna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, d.v.s.,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Det följer att $\det A = -21$ och därmed Volymen=21.