Kryssuppgifter veckan 5

Viktig: använd ett blad per uppgift!

1. Beräkna
$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^7 + x^4 + \ln x}{x^7 + 2x^6 + 7x^5 + \sin x}$$

2. Bestäm $a \neq 0$ så att
$$\lim_{x\to 0} f(x)$$
existerar, då
$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}-1}{x} & \text{då } x < 0 \\ \frac{\sin(a^2 x)}{x} - 1 & \text{då } x > 0 \end{cases}$$

3. Lös följande systemet genom att reducera totalmatrisen (augmented matrix) till trappsteg formen (echelon form)
$$x_1 + 2x_2 = 2, \quad 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -2, \quad -3x_1 - 5x_2 + x_3 = 1$$

4. Bestäm om följande ekvationssystemet har en unik lösning:
$$5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 41, \quad 5x_1 + 10x_2 - 7x_3 = -17, \quad -4x_1 - 7x_2 + 6x_3 = \frac{14}{11}$$

Lösningar

1. Vi har
$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^7 + x^4 + \ln x}{x^7 + 2x^6 + 7x^5 + \sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^7\Big(-2 + \frac{4}{x^3} + \frac{\ln x}{x^7}\Big)}{x^7\Big(1 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2} + \frac{\sin x}{x^7}\Big)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2 + \frac{4}{x^3} + \frac{\ln x}{x^7}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2} + \frac{\sin x}{x^7}} = -2$$
då används att funktionerna $4/x^3, (\ln x)/x^7, 2/x, 7/x^2, (\sin x)/x^7$ konvergerar mot noll då $x \to \infty$.

2. Gränsvärdet existerar om vänster och högergränsvärden existerar och lika varandra. Vänstergränsvärdet ges av

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{ax}-1}{x} = a \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{ax}-1}{ax}$$

Med variabelsubstitutionen $y = ax$ får vi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{ax}-1}{ax} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{y}-1}{y} = 1.$$

Därmed $\lim_{x\to 0^-} f(x) = a$. Högergränsvärdet ges av

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin(a^2x)}{x} - 1\right) = \left(a^2 \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(a^2x)}{a^2x}\right) - 1.$$

Med variabelsubstitutionen $y = a^2x$ får vi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \left(a^2 \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y}\right) - 1 = a^2 - 1.$$

Därför existerar gränsvärdet $\lim_{x\to 0} f(x)$ om och endast om $a = a^2 - 1$, vilket ger $a = (1 \pm \sqrt{5})/2$.

3. Totalmatrisen ges av

$$(A\ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & -2 \\ -3 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi vill radreducera denna matris till en matris med formen

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Låt R_1, R_2, R_3 vara raderna av totalmatrisen. Genom att ersätta R_2 med $R_2 - 2R_1$ får vi matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ -3 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nu byter vi platsen av raden 2 och raden 3 och så får vi matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -3 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Slutligen ersätter vi andra raden med andra raden plus tre gånger första raden och erhåller att totalmatrisen är radekvivalent med trappstegsmatrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Den sista är totalmatrisen till ekvationssystemet

$$x_1 + 2x_2 = 2, \quad x_2 + x_3 = 7, \quad 3x_3 = -6$$

som är ekvivalent (d.v.s., det har samma lösningar) med ekvationssystemet i uppgiften. Från sista ekvationen får vi $x_3 = -2$. Från andra ekvationen får ni $x_2 = 7 - x_3 = 7 - (-2) = 9$. Slutligen ger första ekvationen $x_1 = 2 - 2x_2 = 2 - 2 * 9 = -16$. Alltså är lösningen

$$x_1 = -16, \quad x_2 = 9, \quad x_3 = -2.$$

4. Ett $n \times n$ ekvationssystem, d.v.s., ett ekvationssystem med samma antalet ekvationer och variabler, har en unik lösning om och endast om $\det A \neq 0$, då A är matrisen av obekanta koefficienter. I detta fall

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 \\ 5 & 10 & -7 \\ -4 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

som har determinanten $\det A = 25$. Därför har systemet en unik lösning. Notera att uppgiften inte ber att beräkna lösningen!