Kryssuppgifter veckan 6

Viktig: använd ett blad per uppgift!

1. Låt
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{om } x > 1 \\ ax+b & \text{om } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\sin^2(x)}{3x} & \text{om } x < 0 \end{cases}$$
   Bestäm konstanterna a, b så att f blir kontinuerlig.

2. Bestäm om funktionen f har en asymptot då $x \to \infty$:
$$f(x) = \frac{(e^{1/x}-1)x^4 + x^2 - 1}{3x^2+4}$$

3. Bestäm konstanten a så att $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är den enda lösningen till följande ekvationssystem
$$ax_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \quad -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \quad -2x_1 - x_2 + ax_3 = 0$$

4. Hitta lösningsmängd till följande ekvationssystem
$$-2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 2, \quad -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \quad 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -6$$

Lösningen.

1. Vi omskriver funktioner f för $x > 1$ som
$$\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2+x+1$$
   och därmed
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3.$$
   Eftersom $\lim_{x \to 1^-} f(x) = a + b$, då kräver kontinuiteten av f i $x = 1$ att
$$a + b = 3. \tag{1}$$

Dessutom

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2(x)}{3x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{3}\frac{\sin(x)}{x} = 0,$$

då vi använde att $(\sin x)/x \to 1$ och $(\sin x)/3 \to 0$ då $x \to 0$. Eftersom $\lim_{x\to 0^+} f(x) = b$, då kräver kontinuiteten av f i $x = 0$ att $b = 0$. Därför, från (1), $a = 3$.

2. Denna uppgift ströks (lösningen kräver att man gör en Taylors utveckling av funktionen $(e^x - 1)/x$. Taylors utveckling studeras i del 2 av kursen)

3. Ekvations system i matrisformen skrivs $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, då

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Ett 3×3 ekvationssystem har en unik lösning om och endast om $\det A \neq 0$. I detta fall har vi $\det A = 3a^2+5a+2$, därmed $\det A = 0$ om och endast om $a = -2/3$ eller $a = -1$. Därför är $\mathbf{x} = 0$ den unika lösningen till det givna homogena ekvationssystemet när $a \neq -1$ och $a \neq -2/3$.

4. I matrisformen skrivs ekvationssystemet som $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, då

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Totalmatrisen är

$$(A\ \mathbf{b}) = A = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 6 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

och kan radreduceras till trappstegsformen

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eftersom finns en nollrad då kan man välja en variabel fritt, t. ex., $x_3 = t$, då t är ett godtyckligt reellt tal. Andra raden motsvarar ekvationen $-3x_2 - 2x_3 = 0$, som innebär $x_2 = -2t/3$. Första raden ger direkt $x_1 = -1$. Därmed

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2t/3 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Därför lösningsmängden V till ekvationssystemet ges av

$$V = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$