Kryssuppgifter veckan 7

Viktig: använd ett blad per uppgift!

1. Bestäm den största möjliga definitionsmängd av $f(x) = \ln^2(\sin^2(x))$ och beräkna $f'(x)$.

2. Låt
$$f(x) = x\ln(x) + \frac{1}{4}.$$
Visa att ekvationen $f(x) = 0$ har två lösningar i intervallet $x \in [0, 1]$.

3. Bestäm konstanten h så att $\mathbf{a_3} \in \text{Span}\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}\}$, då
$$\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4h \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$
Bestäm också h så att $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ är linjärt oberoende.

4. Låt R vara parallellogrammen som spänns upp av vektorer $(0, 1)$, $(1, 1)$ och S parallellogrammen som spänns upp av vektorer $(1, 2)$, $(2, 0)$ (Rita en figur). Hitta en linjär avbildning $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, som deformerar R till S. Visa också att $V_S = V_R \det A$, då V_R och V_S är arean av parallellogrammerna R, S.

Lösningar

1. I definitionsmängden av f måste $\sin^2(x) > 0$ gälla. Eftersom $\sin^2(x) \geq 0$ och $\sin^2(x) = 0$ om och endast om $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ då är största möjliga definitionsmängden av f lika med mängden $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$. För $x \in D$ ges f' av
$$f'(x) = 2\ln(\sin^2(x)) * \frac{1}{\sin^2(x)} * 2\sin x \cos x = 4\ln(\sin^2(x))\frac{\cos x}{\sin x}.$$

2. Lösningarna till $f(x) = x\ln x + 1/4 = 0$ är skärningspunkterna mellan grafen av $f(x)$ och x-axeln. Vi då fortsätter med att rita upp grafen till funktionen $f(x)$ i stora drag .

Först notera att $f(1) = 1/4$ (eftersom $\ln 1 = 0$). Dessutom, efter variabel substitutionen $x = 1/y$,

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{y \to \infty} \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y \to \infty} -\frac{\ln y}{y} = 0$$

och därmed $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1/4$. Dessutom $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Derivatan av f är

$$f'(x) = (x \ln x)' = \ln(x) + 1$$

och därmed $f'(x) > 0$ för $x > e^{-1}$, $f'(x) < 0$ för $0 < x < e^{-1}$ och $f'(x) = 0$ för $x = e^{-1}$. Därför är $x = e^{-1}$ en stationär punkt till funktionen f. Eftersom $f(x)$ är strängt avtagande för $0 < x < e^{-1}$ och strängt växande för $x > e^{-1}$ då har f en strängt minimum i $x = e^{-1}$. Dessutom $(e^{-1} \ln e^{-1}) + 1/4 = -e^{-1} + 1/4 < 0$. Om man ritar upp grafen till $f(x)$ blir nu det klart att det finns två skärningspunkter mellan grafen av f och x-axeln.

3. $\mathbf{a_3} \in \operatorname{Span}\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}\}$ om och endast om det finns en lösning (x_1, x_2) till ekvationssystemet

$$x_1 - 2x_2 = h, \quad hx_1 + x_2 = 0, \quad -x_1 - 4hx_2 = 3 \tag{1}$$

d.v.s., $\mathbf{a_3} = x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2}$. Total matrisen ges av

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & h \\ h & 1 & 0 \\ -1 & -4h & 3 \end{pmatrix}$$

och kan radreduceras till

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & h \\ 0 & 1+2h & -h^2 \\ 0 & 0 & -2h^2+h+3 \end{pmatrix}$$

Om $-2h^2+h+3 \neq 0$, d.v.s., $h \neq -1, 3/2$, så motsvarar sista raden till falska ekvationen $0 = 2h^2+h+3 \neq 0$ och därmed har (1) inga lösningar. Då måste $h = -1$ eller $h = 3/2$. För båda dessa värden har ekvationssystemet (1) en unik lösning. För $h = -1$ ges lösningen av $x_1 = -3, x_2 = -1$. För $h = 3/2$ ges lösningen av $x_1 = 3/8, x_2 = -9/16$.

Nu bestämmer vi för vilka värden av h är vektorerna linjärt oberoende. Eftersom vi har tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ kan denna uppgift utförs genom att beräkna determinanten till matrisen A vars kolumner ges av vektorerna $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$. Vi har

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & h \\ h & 1 & 0 \\ -1 & -4h & 3 \end{pmatrix} = -4h^3 + 7h + 3 = p(h)$$

Notera att $p(-1) = 0$. Därmed finns ett andragradspolynom $q(h)$ så att $p(h) = (h+1)q(h)$. Man får omedelbart $q(h) = -4h^2 + 4h + 3$. Genom att lösa $q(h) = 0$ ser man att $q(h) = (h+1/2)(h-3/2)$. Därför

$$\det A = (h+1)(h+1/2)(h-3/2)$$

och därmed $\det A \neq 0$ för $h \neq -1, -1/2, 3/2$. För dessa värden av h är $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ linjärt oberoende.

4. A är en 2×2 matris, d.v.s.,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Vi vill hitta koefficienterna a, b, c, d så att

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ och } A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d.v.s

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

och

$$\begin{pmatrix} a + b \\ c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Det följer att

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Dessutom

$$V_R = \left| \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1, \quad V_S = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right| = 4, \quad \det A = 4$$

och därmed $V_S = V_R \det A$.