Matematiska vetenskaper
Göteborgs Universitet
Simone Calogero

Datum: ?? Tid: ??
Hjälpmedel: Cahlmersgodkänd miniräknare
Telefonvakt: ?? Tel.:??

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 1 (övningstenta!!!!)

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Tentan har maximalt 25 poäng, därtill kommer poäng från kryssuppgifter (max 3 poäng). Betygsgränserna är 12 för G och 18 för VG.

Uppgift 1. (max 4 p) På denna uppgift ska enbart svar ges. En poäng per deluppgift.

a) Bestäm konstanten a så att vektorer $(1, a)$, $(a, 3)$ är linjärt oberoende

b) Hitta derivatan till funktionen $f(x) = xe^{\sin x}$

c) Hitta volymen av parallellepipeden spänns upp av vektorerna $(1, -1, 1)$, $(2, 0, 1)$, $(0, 1, -1)$

d) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2/x} - 1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Uppgift 2. (max 3 p) Varje fråga ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger 0.5 p, fel svar ger -0.5 p. Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

a) Om $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, då är $f(0) = 1$.

b) Tre icke-noll vektorer i planet kan inte vara linjärt oberoende.

c) Om en funktion f har asymptoten $y = 3x + 1$ då $x \to \infty$ så måste f divergera då $x \to \infty$.

d) Det finns en unik funktion f så att $f'(x) = 2x$, för alla $x \in \mathbb{R}$.

e) Ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kan ha precis en lösning, oändligt många lösningar eller ingen lösning.

d) Ett 3×3 ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med $\det A = 0$ har oändligt många lösningar.

Uppgift 3. (max 3 p) Bestäm den största möjliga definitionsmängden till funktionen

$$f(x) = \ln(x^2 + |x + 1| - 1)$$

Uppgift 4. (max 3 p) Bestäm konstanten $a \in \mathbb{R}$ så att ekvationssystemet

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \quad x_1 + ax_2 - x_3 = 0, \quad -x_1 + ax_2 + x_3 = -a^2$$

har oändligt många lösningar och visa att för alla andra värden av a finns endast en lösning.

Uppgifter 5. (max 3 p) Bestäm konstanterna $a, b \in \mathbb{R}$ så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}-1}{e^x-1}, & x < 0 \\ \frac{\ln(1+ax)}{bx}, & x \geq 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig. Bestäm om f har asymptoter då $x \to \infty$ och då $x \to -\infty$.

Uppgift 6. (max 3 p) Hitta en linjär avbildning $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, som transformerar parallellogrammen R med hörn $(1,2), (-1,1)$ till parallellogrammen S med hörn $(2,2), (1,3)$. Visa också att $\det A = V_S/V_R$, då V_R, V_S är arean av de två parallellogrammerna.

Uppgift 7. (max 3 p) Visa att polynomet

$$p(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$$

har precis tre nollställen i intervallet $x \in [-3, 2]$ och inget annat nollställe för $x \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$.

Uppgift 8. (max 3p) Skissera grafen till funktionen

$$f(x) = |x^2 + x - 2|$$

och hitta inversen av f i alla intervallen då f är injektiv.