Matematiska vetenskaper
Göteborgs universitet
Thomas Bäckdahl

Datum: 2017-08-24 Tid: 14:00-18:00
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Raad Salman Tel.: ankn 5325

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 2.

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng.

1. Låt $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$.
Bestäm en ortogonal bas $\mathcal{B}$ för $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ och bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{u}$ på W. **(3p)**

2. Avgör ifall den kvadratiska formen $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 2x_3^2$ är positivt definit eller inte. **(3p)**

3. Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = & -2x_1(t) & -2x_2(t) \\ x_2'(t) = & -2x_1(t) & +x_2(t) \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = -5$. **(3p)**

4. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor till matrisen $\begin{bmatrix} 6 & -8 & 8 \\ 4 & -9 & 10 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$. **(1p)**

b) Om A är en 3×3 matris med kolonnerna $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ och $\mathbf{a}_3$ sådana att $4\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_3$, så har ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oändligt många lösningar. **(1p)**

c) Det finns en inverterbar kvadratisk matris A med egenvärde 0. **(1p)**

5. a) Lös differentialekvationen $xy' + 2y = x^{-1}\cos x$, $x > 0$. **(2p)**

b) Lös differentialekvationen $y' = x^3 e^{-2y}$, $y(0) = 0$. **(2p)**

c) Lös differentialekvationen $y'' + y' - 6y = 2$. **(2p)**

6. Bestäm den primitiva funktionen $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln x)^2}$. **(2p)**

7. Området $1 - x^2 \le y \le x^2 + 1$, $-1 \le x \le 1$ roteras runt x-axeln. Beräkna rotationsvolymen. **(2p)**

8. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - e^{x^2}}{2x\cos(x) - \log(1+2x)}$$

med hjälp av MacLaurin utveckling. **(3p)**

Vänd

Några standard MacLaurin utvecklingar:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}) \\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1})
\end{aligned}$$