Matematiska vetenskaper
Göteborgs universitet
Richard Lärkäng

Datum: 2018-01-10 Tid: 14:00-18:00
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Richard Lärkäng Tel.: ankn 3524

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 2.

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng.

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

   a) Bestäm alla egenvärden till A och baser för motsvarande egenrum. **(2p)**

   b) Diagonalisera A eller förklara varför det inte går. **(1p)**

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -5 & -6 \end{bmatrix}$.

   Bestäm en *ortogonal* bas för nollrummet $\operatorname{Nul} A$. **(3p)**

3. Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -1 \\ -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   a) Bestäm minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ **(2p)**

   b) Bestäm avståndet mellan $\mathbf{b}$ och $\operatorname{Col} A$. **(1p)**

4. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller motivera eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.

   a) Om $B = PAP^{-1}$ och $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A med egenvärde λ så är $\mathbf{u} = P\mathbf{v}$ en egenvektor till B med egenvärde λ. **(1p)**

   b) Om A är en $m \times n$-matris (dvs., med m rader och n kolonner) så är $\operatorname{Col} A$ ett delrum av $\mathbb{R}^n$. **(1p)**

   c) Matrisen $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ är ortogonalt diagonaliserbar. **(1p)**

5. a) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' + \cos(x)y = \cos(x)$, $y(1) = 2$. **(2p)**

   b) Lös differentialekvationen $3(x+1)(x-1)y^2y' = 2$, $x > 1$. **(2p)**

   c) Lös differentialekvationen $y'' - y' = e^x$. **(2p)**

6. Bestäm $\displaystyle\int \ln(1+x)\,dx$. **(2p)**

Vänd

7. Avgör om följande generaliserade integral är konvergent. **(2p)**
   Obs: Du behöver inte beräkna värdet ifall den är det!

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + \sin^2(x)}\, dx.$$

8. Beräkna gränsvärdet **(3p)**

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2(e^{2x} - 1 - 2x)}{(\sin(3x^2))^2}.$$

Några standard Maclaurinutvecklingar:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}) \\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),
\end{aligned}$$

där $\mathcal{O}(x^k)$ betecknar en funktion på formen $x^k B(x)$, där $B(x)$ är begränsad nära 0.