Lösningar, Tenta 2018-01-10, MMGF11

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

   a) Bestäm alla egenvärden till A och baser för motsvarande egenrum.

   b) Diagonalisera A eller förklara varför det inte går.

---

a) Egenvärden: A övre triangulär, så egenvärden = element på diagonalen = 2 och 3

Egenrum för $\lambda = 2$: $A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ allmänna lösn. till $(A-2I)\mathbf{x} = 0$ är

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bas för egenrummet för $\lambda = 2$.

Egenrum för $\lambda = 3$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ allm. lösn. till $(A-3I)\mathbf{x} = 0$ är $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bas för egenrummet för } \lambda = 3.$$

Svar: A har egenvärden 2 och 3 med baser $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ för respektive egenrum.

b) Såg i a) att A har bara 2 st. linjärt oberoende egenvektorer. En 3×3-matris är diagonaliserbar om och endast om den har 3 st. linjärt oberoende egenvektorer. Alltså är A inte diagonaliserbar.

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -5 & -6 \end{bmatrix}$.

Bestäm en *ortogonal* bas för nollrummet Nul A. **(3p)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -5 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $A\mathbb{x} = 0$ har lösn.

$$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_3 + 2x_4 + 2x_5 \\ -x_4 - 2x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ Nul A har en bas $\mathbb{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbb{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbb{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Ej ortogonala, använder Gram-Schmidt metoden:

$$\mathbb{v}_1 = \mathbb{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{v}_2 = \mathbb{b}_2 - \frac{\mathbb{b}_2 \cdot \mathbb{v}_1}{\mathbb{v}_1 \cdot \mathbb{v}_1} \mathbb{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{v}_3 = \mathbb{b}_3 - \frac{\mathbb{b}_3 \cdot \mathbb{v}_1}{\mathbb{v}_1 \cdot \mathbb{v}_1} \mathbb{v}_1 - \frac{\mathbb{b}_3 \cdot \mathbb{v}_2}{\mathbb{v}_2 \cdot \mathbb{v}_2} \mathbb{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Svar: Nul A har en ortogonal bas

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -1 \\ -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

b) Bestäm avståndet mellan $\mathbf{b}$ och $\operatorname{Col} A$.

---

a) Minstakvadratlösningarna är lösningarna till normalekvationen

$$A^t A \mathbf{x} = A^t \mathbf{b}.$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -1 \\ -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$$

$$A^t \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^t A \mid A^t \mathbf{b} \right) = \begin{pmatrix} 14 & 14 & 14 \\ 14 & 20 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1/6 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Svar: Minstakvadr. lösn. är

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) Enligt satsen om bästa approximation ges avståndet mellan Col A och $\mathbf{b}$ av

$$|\mathbf{b}^\perp| = |\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}|.$$

Minstakvadr. lösn. $\hat{x}$ uppfyller

$$\hat{b} = A\hat{x} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -1 \\ -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|b^{\perp}| = |b - \hat{b}| = \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4 \cdot 4} = 4.$$

Svar: Avståndet är 4.

4. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller motivera eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.

a) Om $B = PAP^{-1}$ och $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A med egenvärde λ så är $\mathbf{u} = P\mathbf{v}$ en egenvektor till B med egenvärde λ. **(1p)**

b) Om A är en $m \times n$-matris (dvs., med m rader och n kolonner) så är $\operatorname{Col} A$ ett delrum av $\mathbb{R}^n$. **(1p)**

c) Matrisen $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ är ortogonalt diagonaliserbar. **(1p)**

---

a) Sant: $\mathbf{v}$ egenvektor till A med egenv. $\lambda \Rightarrow A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$

$$\Rightarrow B\mathbf{u} = PA\underbrace{P^{-1}P}_{=I}\mathbf{v} = PA\mathbf{v} \underset{(\mathbf{v}\text{ egenvekt.})}{=} P(\lambda\mathbf{v}) = \lambda P\mathbf{v} \underset{(\text{def. av } \mathbf{u})}{=} \lambda \mathbf{u}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{u}$ egenvektor till B med egenvärde λ.

b) Falskt Om A har kolonner $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ så är $\operatorname{Col} A = \operatorname{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$, och eftersom $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^m$ så är $\operatorname{Col} A \subseteq \mathbb{R}^m$ och alltså inte ett delrum av $\mathbb{R}^n$ (för $m \neq n$).

c) Falskt. En matris är ortogonalt diagonaliserbar om och endast om den är symmetrisk, vilket $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ inte är.

Alternativt bevis: Man kan visa att A har egenvärden 2 & 5 med baser $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ & $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ för respektive egenrum.

Eftersom egenrummen ej är ortogonala mot varandra så är A ej ortogonalt diagonaliserbar.

5. a) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' + \cos(x)y = \cos(x)$, $y(1) = 2$. **(2p)**

b) Lös differentialekvationen $3(x+1)(x-1)y^2y' = 2$, $x > 1$. **(2p)**

c) Lös differentialekvationen $y'' - y' = e^x$. **(2p)**

---

a) Primitiv till $\cos x$ är $\sin x$, så mult. med integrerande faktor $e^{\sin x}$:

$$e^{\sin x} y' + e^{\sin x}\cos x \cdot y = e^{\sin x}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(e^{\sin x} y\right)' = e^{\sin x}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\sin x} y = \int e^{\sin x}\cos x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{array} \right\} =$$

$$= \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C$$

$$\Rightarrow \quad y = 1 + Ce^{-\sin x}$$

$$y(1) = 1 + Ce^{-\sin 1} = 2 \Rightarrow C = e^{\sin 1}$$

Svar: $y = 1 + e^{\sin 1}e^{-\sin x} = 1 + e^{\sin 1 - \sin x}$.

b) $3y^2y'(x+1)(x-1) = 2 \quad x>1 \iff$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x+1)(x-1)} \quad \text{så separabel}$$

$$\text{"}\iff\text{"} \quad 3y^2 dy = \frac{2}{(x-1)(x+1)} dx$$

$$\iff \quad \int 3y^2 dy = \int \frac{2}{(x-1)(x+1)} dx.$$

Gör partialbråksuppdelning för att integrera högerledet:

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

$$\iff 2 = A\cdot(x+1) + B(x-1) = (A+B)x + (A-B)$$

"handpåläggning" alt. lösn. av ekv.systemet $\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=2 \end{cases}$

ger $\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$

$$\int 3y^2 dy = \int \frac{2}{(x-1)(x+1)} dx$$

$$\iff \quad y^3 = \int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} dx =$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x+1| + C \underset{(x>1)}{=} \ln(x-1) - \ln(x+1) + C$$

$\Leftrightarrow \quad y = \sqrt[3]{\ln(x-1) - \ln(x+1) + C}$

<u>Svar:</u> $y = \sqrt[3]{\ln(x-1) - \ln(x+1) + C}$
$= \sqrt[3]{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + C}$

c) <u>Homogenlösn.</u> till $y'' - y' = 0$:

Karakteristisk ekv: $r^2 - r = 0 \Leftrightarrow r = 0$ el. $r = 1$

$\Rightarrow$ homogenlösn. $\quad y_h = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{1 \cdot x} = C_1 + C_2 e^x.$

Partikulärlösn. till $y'' - y' = e^x$.

När HL $= e^x$, gör normalt sett ansats $y_p = Ce^x$, men eftersom homogenlösn., gör istället ansats
$y_p = Cxe^x$.
$y_p' = Ce^x + Cxe^x = C(x+1)e^x$
$y_p'' = Ce^x + C(x+1)e^x = C(x+2)e^x$

$\Rightarrow y_p'' - y_p' = C(x+2)e^x - C(x+1)e^x = Ce^x = e^x$
$\Rightarrow C = 1 \Rightarrow y_p = xe^x$

<u>Svar:</u> Lösningen är $y = y_h + y_p = C_1 + C_2 e^x + xe^x.$

6. Bestäm $\int \ln(1+x)\,dx$. **(2p)**

$$\int \ln(1+x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 1+x \\ dt = dx \end{array} \right\} = \int \underbrace{1}_{f} \cdot \underbrace{\ln x}_{g}\, dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{partiell} \\ \text{integration} \end{array} \right\} = \underbrace{t}_{F}\,\underbrace{\ln t}_{g} - \int \overbrace{\underbrace{t}_{F}\,\underbrace{\frac{1}{t}}_{g'}}^{=1}\, d = t\ln t - t + C$$

$$= (1+x)\ln(1+x) - (1+x) + C$$

<u>Svar:</u> $(1+x)\ln(1+x) - (1+x) + C$

7. Avgör om följande generaliserade integral är konvergent. **(2p)**
Obs: Du behöver inte beräkna värdet ifall den är det!

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + \sin^2(x)}\, dx.$$

$$x^2 + \sin^2 x \geq x^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2+\sin^2 x} \leq \frac{1}{x^2} \quad (*)$$

$$\int_1^M \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^M = -\frac{1}{M} + 1 \to 1 \text{ när } M \to \infty$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \text{ är konvergent.}$$

Enligt jämförelsesatsen och $(*)$ blir då även

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+\sin^2 x}\,dx \text{ konvergent.}$$

Svar: Integralen är konvergent.

8. Beräkna gränsvärdet **(3p)**

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(e^{2x}-1-2x)}{(\sin(3x^2))^2}.$$

Har standardutvecklingar

- $e^t = 1 + t + t^2/2 + O(t^3)$

där $O(t^k)$ betecknar funktion på formen $t^k B(t)$, $B(t)$ begr. nära 0.

$$\Rightarrow e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + O((2x)^3) = 1 + 2x + 2x^2 + O(x^3)$$

- $\sin(t) = t + O(t^3)$

$$\Rightarrow \sin(3x^2) = 3x^2 + O((3x^2)^3) = 3x^2 + O(x^6)$$

Alltså blir

$$\frac{x^2(e^{2x}-1-2x)}{(\sin(3x^2))^2} = \frac{x^2(\cancel{1}+\cancel{2x}+2x^2+O(x^3)\cancel{-1}\cancel{-2x})}{(3x^2+O(x^6))^2}$$

$$= \frac{2x^4+O(x^5)}{9x^4+O(x^8)} = \frac{2+O(x)}{9+O(x^4)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{2}{9}$$

(eftersom $O(x^k) \to 0$ när $x \to 0$ om $k > 0$)

Svar: Gränsvärdet är $\frac{2}{9}$.