Matematiska vetenskaper
Göteborgs universitet
Richard Lärkäng

Datum: 2018-04-03 Tid: 8:30-12:30
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Oskar Allerbo Tel.: ankn 5325

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 2.

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng.

1. Lös systemet av differentialekvationer $\begin{cases} x_1'(t) &= 3x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_2'(t) &= -x_1(t) + 7x_2(t) \end{cases}$, **(3p)**
   $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. Låt W vara underrummet till $\mathbb{R}^3$ som spänns av vektorerna
   $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   a) Bestäm en bas $\mathcal{B}$ för W. **(1p)**

   b) Bestäm dimensionen av W. **(1p)**

   c) Bestäm koordinaterna $(\mathbf{u})_{\mathcal{B}}$ av vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ relativt basen $\mathcal{B}$ från a). **(1p)**

3. Matrisen A, som är en 3×3-matris, har egenvärden $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = -1$ och respektive egenvektorer $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Bestäm matrisen A. **(3p)**

4. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller motivera eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.

   a) Om A är en 3×3-matris och $\operatorname{rank} A \geq 2$ så är $\dim \operatorname{Nul} A \leq 1$. **(1p)**

   b) Om A är diagonaliserbar så är A inverterbar. **(1p)**

   c) Vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ligger i $\operatorname{Col} A$, där $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. **(1p)**

5. a) Lös differentialekvationen $y' = 3y$. **(1p)**

   b) Lös begynnelsevärdesproblemet $e^x y' - y^2 = 1$ för $x \geq 0$, $y(0) = 0$. **(2p)**

   c) Hitta alla reella lösningar till differentialekvationen $y'' + 2y' + 5y = 8e^{-x}$. **(3p)**

6. Bestäm $\displaystyle\int x^2 \sin x \, dx$. **(2p)**

Vänd

7. Beräkna volymen av rotationskroppen som man får när området mellan kurvorna $y = 1/x^2$ och $y = x$, $1 \leq x \leq 2$, roteras kring x-axeln. **(2p)**

8. Beräkna gränsvärdet **(3p)**

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^{2x} - 1 - 2x)(\arctan x - x)}{x^5}.$$

Några standard Maclaurinutvecklingar:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}) \\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),
\end{aligned}$$

där $\mathcal{O}(x^k)$ betecknar en funktion på formen $x^k B(x)$, där $B(x)$ är begränsad nära 0.