Lösningar, Tenta 2018-04-03, MMGF11

1. Lös systemet av differentialekvationer $\begin{cases} x_1'(t) &= 3x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_2'(t) &= -x_1(t) + 7x_2(t) \end{cases}$, **(3p)**

$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Systemet svarar mot $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

där $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

För att lösa det, börjar med att ta fram egenvärden och egenvektorer till A:

Egenvärden: Karakteristisk ekvation:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ -1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(7-\lambda) - (-1)\cdot 3 =$$

$$= 21 - 10\lambda + \lambda^2 + 3 = \lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = 5 \pm \sqrt{5^2 - 24} = 5 \pm 1$$

$\Rightarrow$ egenvärden $\lambda_1 = 4$ och $\lambda_2 = 6$.

Egenvektorer $\lambda = 4$: $A - 4I = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $(A - 4I)\mathbf{x} = 0$ har allm. lösn. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ bas för egenrummet för $\lambda = 4$.

$\underline{\lambda=6}$ $\quad A-6I=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow (A-6I)\mathbf{x}=0$ allm. lösn. $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_2\\ x_2\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ bas för egenrummet för $\lambda=6$.

Då har $\mathbf{x}'(t)=A\mathbf{x}(t)$ lösn.

$$\mathbf{x}(t)=C_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1+C_2e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2=C_1e^{4t}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}+C_2e^{6t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Beg. värdet $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}$ ger ekv. system:

$$\left(\begin{array}{cc|c}3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 2\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{array}\right)\Rightarrow C_1=1,\ C_2=-1$$

Svar: Lösningen är $\mathbf{x}(t)=e^{4t}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}-e^{6t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

2. Låt W vara underrummet till $\mathbb{R}^3$ som spänns av vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm en bas $\mathcal{B}$ för W. **(1p)**

b) Bestäm dimensionen av W **(1p)**

c) Bestäm koordinaterna $(\mathbf{u})_{\mathcal{B}}$ av vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ relativt basen $\mathcal{B}$ från a) **(1p)**

---

a) W är samma som kolonnrummet till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pivotkolonner.

Alltså är t.ex. första och tredje kolonnen en bas för W.

<u>Svar:</u> $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ bildar en bas för W.

<u>Obs:</u> Andra svar är möjliga, t.ex. $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

eller $\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

b) W har en bas med 2 element, så $\dim W = 2$.

c) Om tar basen $\mathcal{B} = \{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2\}$, så är

$(\mathbb{u})_{\mathcal{B}}$ lösn. till $B\,(\mathbb{u})_{\mathcal{B}} = \mathbb{u}$ där $B = (\mathbb{b}_1\ \mathbb{b}_2)$.

Om $\mathcal{B}$ som i a) ger det:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -3 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Svar: $(\mathbb{x})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ om $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Obs: Svaret beror på valet av $\mathcal{B}$, och

t.ex. $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ger $(\mathbb{x})_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

och $\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ger $(\mathbb{x})_{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3. Matrisen A, som är en 3×3-matris, har egenvärden $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = -1$ och respektive egenvektorer $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Bestäm matrisen A. **(3p)**

Om v_1, v_2, v_3 3 st. linjärt oberoende egenvektorer till A med resp. egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$,

så är $A = PDP^{-1}$, där

$$P = (v_1 \ v_2 \ v_3) \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Kollar att de givna v_1, v_2 och v_3 är linj. oberoende genom att försöka invertera P.

$$(P \ I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -1 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -1 \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

så v_1, v_2 och v_3 linj. oberoende och $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

<u>Svar:</u> $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

4. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller motivera eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.

a) Om A är en 3×3-matris och rank $A \geq 2$ så är $\dim \operatorname{Nul} A \leq 1$. **(1p)**

b) Om A är diagonaliserbar så är A inverterbar. **(1p)**

c) Vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ligger i Col A, där $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. **(1p)**

---

a) Enligt rangsatsen, om A 3x3-matris så är

$$\operatorname{rank} A + \dim \operatorname{Nul} A = 3.$$

Så, om rank $A \geq 2$, så är

$$\dim \operatorname{Nul} A = 3 - \operatorname{rank} A \leq 3 - 2 = 1.$$

Så påståendet är <u>sant</u>

b) T.ex. matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

är diagonaliserbar för $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

men A ej inverterbar för $\det A = 1 \cdot 0 = 0$.

Så påståendet är <u>falskt</u>

c) Gäller omm kan lösa $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$:

$$(A | \mathbf{v}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

lösbart ekv. system

Så påståendet är <u>sant</u>.

5. a) Lös differentialekvationen $y' = 3y$. **(1p)**

b) Lös begynnelsevärdesproblemet $e^x y' - y^2 = 1$ för $x \geq 0$, $y(0) = 0$. **(2p)**

c) Hitta alla reella lösningar till differentialekvationen $y'' + 2y' + 5y = 8e^{-x}$. **(3p)**

---

a) Linjär ekv. av första ordningen:

$$y' = 3y \iff y' - 3y = 0 .$$

Multiplicerar med integrerande faktor e^{-3x}:

$$e^{-3x} y' - 3e^{-3x} y = 0$$

$$\iff \left(e^{-3x} y\right)' = 0$$

$$\iff e^{-3x} y = C$$

$$\iff y = Ce^{3x} .$$

<u>Svar:</u> $y = Ce^{3x}$.

b)

$$e^x y' - y^2 = 1 \iff e^x y' = 1 + y^2$$

$$\iff \frac{1}{1+y^2} y' = e^{-x}$$

så separabel diff. ekv.

$$\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx} = e^{-x} \overset{\text{"}}{\Longleftrightarrow} \frac{dy}{1+y^2} = e^{-x}dx \overset{\text{"}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int e^{-x}dx$$

$$\Longleftrightarrow \quad \arctan(y) = -e^{-x} + C.$$

$$y(0)=0 \Rightarrow \arctan(y(0)) = \arctan(0) = 0 = -e^{-0} + C$$

$$\Longleftrightarrow \quad C = 1$$

Så $\arctan(y) = 1 - e^{-x}$

$$\Longleftrightarrow \quad y = \tan(1-e^{-x})$$

(ok om $x \geq 0$ s.a. $0 < 1-e^{-x} \leq 1$)

c) Löser först den homogena ekv. $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Kar. ekv: $r^2 + 2r + 5 = 0 \Longleftrightarrow r = -1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 5} = -1 \pm \sqrt{-4}$

$$\Longleftrightarrow r = -1 \pm 2i.$$

Så allmänna komplexa lösn. är $y_h = C_1 e^{(-1+2i)x} + C_2 e^{(-1-2i)x}$

Allmänna reella lösn. blir då $y_h = Ae^{-x}\cos(2x) + Be^{-x}\sin(2x)$

(genom att ta real och imaginärdel av detta, alt. genom att sätta $C_1 = (A - Bi)/2$
$C_2 = (A + Bi)/2$)

För att hitta partikulärlösn. till $y''+2y'+5y=8e^{-x}$,

gör ansats $y_p = Ce^{-x} \Rightarrow y_p' = -Ce^{-x} \Rightarrow y_p'' = Ce^{-x}$

$\Rightarrow \quad y_p''+2y_p'+5y_p = Ce^{-x}(1-2+5) = 4Ce^{-x} = 8e^{-x}$

$\Rightarrow \quad C=2 \Rightarrow y_p = 2e^{-x}.$

Svar: Allmänna reella lösn. är

$$y = y_p + y_h = Ae^{-x}\cos(2x) + Be^{-x}\sin(2x) + 2e^{-x}.$$

6. Bestäm $\int x^2 \sin x \, dx$. **(2p)**

$$\int \underbrace{x^2}_{F} \underbrace{\sin x}_{g} \, dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{partiell} \\ \text{integration} \end{array} \right\}$$

$$= \underbrace{x^2}_{F} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{G} - \int \underbrace{2x}_{f} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{G} \, dx$$

$$= -x^2 \cos x + \int \underbrace{2x}_{F} \underbrace{\cos x}_{g} \, dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{partiell} \\ \text{integration} \end{array} \right\}$$

$$= -x^2 \cos x + \underbrace{2x}_{F_2} \underbrace{\sin x}_{G_2} - \int \underbrace{2}_{f_2} \underbrace{\sin x}_{G_2} \, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

<u>Svar:</u> $\int x^2 \sin x \, dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x + C$

7. Beräkna volymen av rotationskroppen som man får när området mellan kurvorna $y = 1/x^2$ och $y = x$, $1 \leq x \leq 2$, roteras kring x-axeln. **(2p)**

Volymen av rotationskroppen som fås när området mellan $y = g(x)$ och $y = h(x)$, $a \leq x \leq b$, där $h(x) \leq g(x)$

ges av $V = \pi \int_a^b g(x)^2 dx - \pi \int_a^b h(x)^2 dx = \pi \int_a^b g(x)^2 - h(x)^2 dx.$

I detta fallet är $h(x) = \frac{1}{x^2} \leq x = g(x)$ om $1 \leq x \leq 2$, så

$$V = \pi \int_1^2 x^2 - \frac{1}{x^4} dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^{-3}}{-3} \right]_1^2 = \pi \left(\frac{2^3 + 2^{-3} - (1+1)}{3} \right) =$$

$$= \pi \left(\frac{6}{3} + \frac{1}{24} \right) = \pi \left(2 + \frac{1}{24} \right)$$

Svar: Volymen är $\pi \left(2 + \frac{1}{24} \right) = \frac{49\pi}{24}$ (volymenheter)

8. Beräkna gränsvärdet **(3p)**

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1-2x)(\arctan x - x)}{x^5}.$$

Använder notationen $O(x^k)$ för funktioner på formen $x^k B(x)$, där $B(x)$ begränsad nära 0.

Enligt formelbladet:

- $$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + O(t^3)$$

$$\Rightarrow e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + O((2x)^3) = 1 + 2x + 2x^2 + O(x^3)$$

$$\Rightarrow e^{2x} - 1 - 2x = 2x^2 + O(x^3) \qquad (1)$$

- $$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + O(x^5)$$

$$\Rightarrow \arctan(x) - x = -\frac{x^3}{3} + O(x^5) \qquad (2)$$

Kombinerar (1) och (2):

$$(e^{2x}-1-2x)(\arctan(x)) = (2x^2 + O(x^3))\left(-\frac{x^3}{3} + O(x^5)\right) =$$

$$= -\frac{2x^5}{3} - \frac{x^3}{3}O(x^3) + 2x^2 O(x^5) + O(x^3)O(x^5) =$$

$$= -\frac{2x^5}{3} - O(x^6)$$

$$\Rightarrow \frac{(e^{2x}-1-2x)(\arctan x - x)}{x^5} = \frac{-\frac{2x^5}{3} + O(x^6)}{x^5} =$$

$$= -\frac{2}{3} + O(x) \to -\frac{2}{3} \text{ när } x \to 0$$

Svar: $-\frac{2}{3}$.