Matematiska vetenskaper
Göteborgs universitet
Richard Lärkäng

Datum: 2018-08-30 Tid: 14:00-18:00
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Milo Viviani Tel.: ankn 5325

Tentamen i MMGF11 Analys och linjär algebra del 2.

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gräns för G är 12 poäng, och gräns för VG är 18 poäng.

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & -6 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ -11 \end{bmatrix}$.

   a) Bestäm en ortogonal bas $\mathcal{B}$ för $\operatorname{Col} A$. **(2p)**

   b) Skriv vektorn $\mathbf{v}$ som en linjärkombination av vektorerna i basen $\mathcal{B}$ från a). **(1p)**

2. a) Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ har egenvärdena 1 och 2. Diagonalisera A. **(2p)**

   b) Beräkna A^{100}. **(2p)**

3. Låt
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

   a) Bestäm egenvärdena till matrisen A. **(1p)**

   b) Bestäm matrisen för avbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ relativt basen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, där **(2p)**
$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller motivera eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.

   a) Matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ är symmetrisk. **(1p)**

   b) Vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ligger i $\operatorname{Nul} A$, där $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. **(1p)**

   c) Om U och V är ortogonala $n \times n$-matriser så är också UV en ortogonal $n \times n$-matris. **(1p)**

5. a) Lös differentialekvationen $y' - (\sin x)y = 2\sin x$. **(2p)**

   b) Hitta alla lösningar till differentialekvationen $y'' - 2y' + y = e^x$. **(3p)**

6. Bestäm $\displaystyle\int \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^3 + x}\, dx$. **(2p)**

Vänd

7. Beräkna arean av området som begränsas av kurvorna $y = \sqrt{x-1}$ och $y = (x-1)^2$. **(2p)**

8. Visa med hjälp av Maclaurins formel att om $x \geq 0$ så är **(3p)**

$$0 \leq \ln(1+x) - x + x^2/2 \leq x^3/3.$$

Några standard Maclaurinutvecklingar:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}) \\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),
\end{aligned}$$

där $\mathcal{O}(x^k)$ betecknar en funktion på formen $x^k B(x)$, där $B(x)$ är begränsad nära 0.