Lösningar, Tenta 2018-08-30, MMGF11

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & -6 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ -11 \end{bmatrix}$.

   a) Bestäm en ortogonal bas $\mathcal{B}$ för Col A.

   b) Skriv vektorn $\mathbf{v}$ som en linjärkombination av vektorerna i basen $\mathcal{B}$ från a).

---

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & -6 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 & 2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & -2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alla kolonner är pivotkolonner, så kolonnerna i A:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bildar en bas för Col A.

Ortogonaliserar basen m.h.a. Gram-Schmidts process:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{-18}{6}}_{=-3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{-6}{6}}_{=-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{24}{12}}_{=2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

<u>Svar:</u> $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Använder basen $\mathcal{B} = \{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_3\}$ från a) där

$$\mathbb{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom vektorerna i $\mathcal{B}$ bildar en ortogonalbas är

$$\mathbb{V} = \frac{\mathbb{V} \bullet \mathbb{b}_1}{\mathbb{b}_1 \bullet \mathbb{b}_1} \mathbb{b}_1 + \frac{\mathbb{V} \bullet \mathbb{b}_2}{\mathbb{b}_2 \bullet \mathbb{b}_2} \mathbb{b}_2 + \frac{\mathbb{V} \bullet \mathbb{b}_3}{\mathbb{b}_3 \bullet \mathbb{b}_3} \mathbb{b}_3$$

$$= \frac{30}{6} \cdot \mathbb{b}_1 + 0 \cdot \mathbb{b}_2 + \frac{3}{3} \mathbb{b}_3 = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Obs: I a) är andra svar möjliga, vilket ger också skulle ge annat svar i b).

Svar: $$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. a) Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ har egenvärdena 1 och 2. Diagonalisera A.

b) Beräkna A^{100}.

---

a) Tar fram bas av egenvektorer för att diagonalisera.

<u>Egenrum för $\lambda = 1$:</u>

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allm. lösn. till $(A - I)\mathbb{x} = 0$ är

$$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

så $\mathbb{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\mathbb{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bas till egenrummet för $\lambda = 2$.

<u>Egenrum för $\lambda = 2$</u>

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

så $(A - 2I)\mathbb{x} = 0$ har allm. lösn. $\mathbb{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

så $\mathbb{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bas till egenrummet för $\lambda = 2$.

A har 3 st. linjärt oberoende egenvektorer v_1, v_2, v_3 med resp. egenvärden 1, 1 och 2.

Då är $A = PDP^{-1}$ där $P = (v_1\ v_2\ v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

och $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>Svar:</u> $A = PDP^{-1}$ där $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Om $A = PDP^{-1}$ så är $A^{100} = PD^{100}P^{-1}$

Beräknar P^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (-1)\ (-2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-1)\ (1) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

så $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Alltså är $A^{100} = PD^{100}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2^{101} \\ 0 & 1 & 2^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2-2^{101} & -1+2^{101} & -2+2^{102} \\ -1+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{100} \end{pmatrix}$$

<u>Svar:</u> $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2-2^{101} & -1+2^{101} & -2+2^{102} \\ -1+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{100} \end{pmatrix}$

3. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm egenvärdena till matrisen A.

b) Bestäm matrisen för avbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ relativt basen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, där

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

---

a) Egenvärdena ges av rötterna till den karakteristiska ekv:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ el. } 3.$$

Alternativt, A är övre triangulär så egenvärdena ges av diagonalelementen 2 och 3.

<u>Svar:</u> Egenvärdena är 2 och 3.

b) Matrisen för en avbildning $\mathbb{x} \longmapsto T(\mathbb{x})$ relativt en bas $\mathcal{B} = \{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2\}$ ges av

$$(T)_{\mathcal{B}} = \left((T(\mathbb{b}_1))_{\mathcal{B}} \quad (T(\mathbb{b}_2))_{\mathcal{B}} \right)$$

Här är $T(\mathbb{x}) = A\mathbb{x}$

så $T(\mathbb{b}_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T(\mathbb{b}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Om $B = (\mathbb{b}_1 \ \mathbb{b}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ så är $(\mathbb{y})_{\mathcal{B}}$ lösn. till $B\mathbb{x} = \mathbb{y}$.

$\underline{(T(\mathbb{b}_1))_{\mathcal{B}}}$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ så $(T(\mathbb{b}_1))_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{(T(b_2))_B:}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (T(b_2))_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

<u>Svar:</u> Matrisen är $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Är nedanstående påståenden sanna eller falska? För att få poäng för rätt svar måste du motivera varför ett påstående är sant eller motivera eller ge ett motexempel som visar att det är falskt.

a) Matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ är symmetrisk.

b) Vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ligger i Nul A, där $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

c) Om U och V är ortogonala $n \times n$-matriser så är också UV en ortogonal $n \times n$-matris.

---

a) A symmetrisk om $A^t = A$.

Om $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ så är $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = A$.

<u>Svar:</u> Falskt

b) $\text{Nul } A = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid Av = 0 \}$

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin \text{Nul } A$.

<u>Svar:</u> Falskt

c) A ortogonal om $A^t = A^{-1} \Leftrightarrow A^t A = I$
(om A kvadratisk)

Har alltså att $\overset{(1)}{U^t U = I}$ och $\overset{(2)}{V^t V = I}$. Då blir

$(UV)^t UV = V^t \underbrace{U^t U}_{= I \text{ enl. } (1)} V = V^t V \overset{}{\underset{(2)}{=}} I$ så UV är ortogonal

<u>Svar:</u> Sant.

5. a) Lös differentialekvationen $y' - (\sin x)y = 2\sin x$.

b) Hitta alla lösningar till differentialekvationen $y'' - 2y' + y = e^x$.

---

a) Linjär diff ekv. av första ordningen.

$-\int \sin x \, dx = \cos x$

$\Rightarrow$ mult. ekv. med integrerande faktor $e^{\cos x}$:

$$e^{\cos x} y' - \sin x \, e^{\cos x} y = (y e^{\cos x})' = 2 \sin x \, e^{\cos x}$$

$$\Rightarrow \quad y e^{\cos x} = \int 2 \sin x \, e^{\cos x} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{array} \right\} =$$

$$= -2\int e^t \, dt = -2e^t + C = -2e^{\cos x} + C$$

$$\Rightarrow \quad y = -2 + Ce^{-\cos x}$$

Svar: $y = -2 + Ce^{-\cos x}$.

b) Hittar först alla homogenlösn. $y'' - 2y' + y = 0$ m.h.a. karakteristiska ekv: $r^2 - 2r + 1 = 0$

$\Rightarrow r = 1$ (dubbelrot)

$\Rightarrow \quad y_h = (C_1 + C_2 x)e^x$ allmänna homogenlösn.

När HL $= e^x$ skulle typiskt sett gjort ansats Ce^x, men går inte eftersom är en partikulärlösn.

Gör då typiskt istället Cxe^x som ansats, men även den är homogenlösn., så gör istället ansatsen $y_p = Cx^2e^x$ som inte är en homogenlösn.

$$y_p' = C\,2xe^x + Cx^2e^x = (2x+x^2)Ce^x$$

$$y_p'' = (2+2x)Ce^x + (2x+x^2)Ce^x = (2+4x+x^2)Ce^x$$

$$\Rightarrow y_p'' - 2y_p' + y_p = (2+4x+x^2)Ce^x - 2(2x+x^2)Ce^x + Cx^2e^x$$

$$= 2Ce^x = e^x \Rightarrow C = 1/2$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{2}x^2e^x.$$

<u>Svar:</u> Allmänna lösn. är $y = y_h + y_p = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{1}{2}x^2e^x$,

C_1, C_2 konstanter.

6. Bestäm $\int \frac{x^3+x^2+x-1}{x^3+x}\,dx$.

Integral av rationell funktion.

Börjar med att göra polynomdivision eftersom täljaren inte lägre grad än nämnaren

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
\hline
x^3+x & x^3+x^2+x-1 \\
 & -(x^3 \quad\; +x) \\
\hline
 & \quad\; x^2 \quad\; -1
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^3+x+x-1}{x^3+x} = 1 + \frac{x^2-1}{x^3+x}$$

Gör partialbråksuppdelning av $\frac{x^2-1}{x^3+x}$

Nämnaren kan faktoriseras $x^3+x = x(x^2+1)$, men inte mer eftersom x^2+1 saknar reella rötter.

Gör då ansats: $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-1 = A(x^2+1) + (Bx+C)\,x = (A+B)x^2 + Cx + A$$

Jämför koeff. framför x^2, x och 1: $\begin{cases} A+B=1 \\ C=0 \\ A=-1 \end{cases} \underset{(A=-1)}{\Leftrightarrow} B=2$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3+x^2+x-1}{x(x^2+1)}\,dx = \int 1 - \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= x - \ln|x| + \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2+1 \\ du = 2x\,dx \end{array} \right\} =$$

$$= x - \ln|x| + \int \frac{1}{u}\,du = x - \ln|x| + \ln|u| + C$$

$$= x - \ln|x| + \ln(x^2+1) + C$$

Svar: $x - \ln|x| + \ln(x^2+1) + C$.

7. Beräkna arean av området som begränsas av kurvorna $y = \sqrt{x-1}$ och $y = (x-1)^2$.

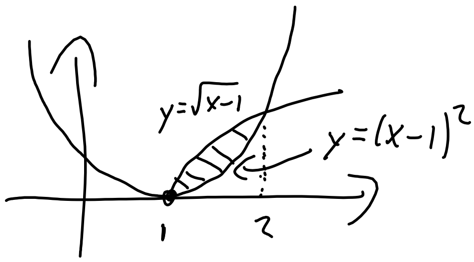
Kollar först när skär varandra:

$$\sqrt{x-1} = (x-1)^2 \iff x-1 = (x-1)^4, \quad x-1 \geq 0$$

$$\iff x=1 \text{ el. } \underbrace{1 = (x-1)^3}_{\iff x-1 = 1 \iff x=2}, \quad x-1 \geq 0.$$

(för $t \mapsto t^3$ växande och $t^3=1 \iff t=1$ om t reell)

Skär varandra då $x=1$ och $x=2$:



Arean mellan kurvorna blir då

$$\int_1^2 \sqrt{x-1} - (x-1)^2 \, dx = \left[\frac{(x-1)^{3/2}}{3/2} - \frac{(x-1)^3}{3} \right]_1^2 =$$

$$= \frac{1^{3/2}}{3/2} - \frac{1^3}{3} - 0 + 0 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Svar: $\frac{1}{3}$ (areaenh.)

8. Visa med hjälp av Maclaurins formel att om $x \geq 0$ så är

$$0 \leq \ln(1+x) - x + x^2/2 \leq x^3/3.$$

Enligt Maclaurins formel:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f^{(2)}(0)\frac{x^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(\theta x)\,x^3}{3!}, \quad \text{för något } 0 \leq \theta \leq 1.$$

Tillämpar på $f(x) = \ln(1+x)$ $\qquad f(0) = \ln(1) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f'(0) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \qquad f^{(2)}(0) = -1$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{-1}{(1+x)^3}\cdot(-2) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

Så $\quad \ln(1+x) = 1\cdot x - 1\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{2}{(1+\theta x)^3}$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} = \frac{2}{(1+\theta x)^3}\cdot\frac{x^3}{6}$$

om $0 \leq \theta \leq 1$ och $x \geq 0$ så är $\theta x \geq 0$

$$0 \leq \frac{2}{(1+\theta x)^3} \leq \frac{2}{(1+0)^3} = 2$$

Eftersom $x^3 \geq 0$ när $x \geq 0$ blir då

$$0 \leq \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \leq 2\,\frac{x^3}{6} = \frac{x^3}{3} \quad \text{för } x \geq 0.$$