Matematiska vetenskaper
Göteborgs Universitet
Simone Calogero

Datum: 2018-10-08 Tid: 14-15
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare
Namn och personnummer:

Dugga i MMGF11 Analys och linjär algebra del 1

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar till uppgifter 3-4. Duggan har maximalt 10 poäng. Skriv din lösning på samma blad som uppgiften.

Uppgift 1. (max 2 p) På denna uppgift ska enbart svar ges. En poäng per deluppgift.

a) Bestäm $h \in \mathbb{R}$ så att $(3, h) \in \mathrm{Span}\{(1, -1), (-2, 2)\}$

b) Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\pi x} - 1}{\sin(2x)}$$

Svar.

a) $h = -3$ b) $\pi/2$

Uppgift 2. (max 2 p) Varje fråga ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger 0.5 p, fel svar ger -0.5 p. Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

a) Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är strängt växande så måste $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

b) Om $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{kx+m} = 1$ så är $y = kx + m$ en asymptot för funktionen f

c) Ett $m \times n$ linjärt ekvationssystem med $m > n$ kan ha oändligt många lösningar

d) Om $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ och $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösningar till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ så är $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ också en lösning

Svar.

a) F b) F c) S d) S

vänd sidan!

Uppgift 3. (max 3 p) Bestäm eventuella asymptoten till $f(x)$ när $x \to \infty$, då

$$f(x) = \frac{4x^3 + x^2 + x}{x^2 + 2}$$

Lösning. Vi beräknar

$$\begin{aligned} f(x) - (kx + m) &= \frac{4x^3 + x^2 + x - (x^2 + 2)(kx + m)}{x^2 + 2} \\ &= \frac{(4 - k)x^3 + x^2(1 - m) + x - 2(kx + m)}{x^2 + 2} \end{aligned}$$

Därmed

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (kx + m)] = 0 \Leftrightarrow k = 4 \text{ och } m = 1$$

Svar: $y = 4x + 1$ är asymptoten till $f(x)$ då $x \to \infty$.

Uppgift 4. (max 3 p) Hitta lösningsmängd till

$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 0, \quad -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0, \quad 2x_1 + 4x_2 - 2x_4 = 0$$

Lösning. Totalmatrisen till ekvationssystemet är

$$(A\ \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

och kan radreduceras till

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Därför är systemet ekvivalent med

$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 0, \quad x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0$$

Det följer att det finns 2 ekvationer om 4 variabler i systemet och därmed kan två variabler välja fritt, till exempel $x_3 = s$ och $x_4 = t$ ger

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8s + 7t \\ -4s - 3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.v.s., $V_0 = \text{Span}\{(8, -4, 1, 0); (7, -3, 0, 1)\}$.