Matematiska vetenskaper
Göteborgs Universitet
Simone Calogero

Datum: Tid:
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare
Namn och personnummer:

Dugga i MMGF11 Analys och linjär algebra del 1

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar till uppgifter 3-4. Duggan har maximalt 10 poäng. Skriv din lösning på samma blad som uppgiften.

Uppgift 1. (max 2 p) På denna uppgift ska enbart svar ges. En poäng per deluppgift.

a) Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Bestäm $x, y \in \mathbb{R}$ så att $A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin^2 x} - \cos x}{\sin^2 x}$$

TIP: Addera och subtrahera 1 i täljaren och skriv resulterande funktionen som summa av två fraktioner

Svar.

a)$x = 3,\ y = 2$ b) $3/2$

Uppgift 2. (max 2 p) Varje fråga ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger 0.5 p, fel svar ger -0.5 p. Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

a) Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har asymptoten $y = kx + m$ när $x \to \infty$ så måste $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

b) Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en icke-konstant periodisk funktion så existerar $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ inte

c) Ett $m \times n$ linjärt ekvationssystem med $m < n$ kan ha en unik lösning

d) Om $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösningar så är $\mathbf{b}$ en linjär kombination av kolumnvektorerna i matrisen A

Svar.

a) F b) S c) F d) S

vänd sidan!

Uppgift 3. (max 3 p) Visa att $y = 2x + 3$ är asymptoten till $f(x)$ när $x \to \infty$, då

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + \sqrt{x}}{x^2 + \ln x}$$

Lösning. Vi beräknar

$$\begin{aligned} f(x) - (2x+3) &= \frac{2x^3 + 3x^2 + \sqrt{x} - (2x+3)(x^2 + \ln x)}{x^2 + \ln x} \\ &= \frac{\sqrt{x} - 2x\ln x - 3\ln x}{x^2 + \ln x} = \frac{x\ln x(-2 + \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} - \frac{3}{x})}{x^2(1 + \frac{\ln x}{x^2})} \\ &= \frac{\ln x(-2 + \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} - \frac{3}{x})}{x(1 + \frac{\ln x}{x^2})} \end{aligned}$$

Därmed

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (2x+3)] = -2 \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Uppgift 4. (max 3 p) Hitta lösningsmängd till

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \quad 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \quad 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 0$$

Lösning. Totalmatrisen till ekvationssystemet är

$$(A\ \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

och kan radreduceras till

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Därför kan 2 variabler välja fritt, t.ex., $x_2 = s$, $x_3 = t$. Första raden motsvarar ekvationen $-x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, vilket innebär $x_1 = s + 2t$. Därför

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.v.s., $V_0 = \text{Span}\{(1,1,0); (2,0,1)\}$.