Matematiska vetenskaper
Göteborgs Universitet
Simone Calogero

Datum: Tid:
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare
Namn och personnummer:

Dugga i MMGF11 Analys och linjär algebra del 1

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar till uppgifter 3-4. Duggan har maximalt 10 poäng. Skriv din lösning på samma blad som uppgiften.

Uppgift 1. (max 2 p) På denna uppgift ska enbart svar ges. En poäng per deluppgift.

a) Bestäm konstanten h så att vektorerna $\mathbf{u} = (h, 1, -h)$ och $\mathbf{v} = (2, h, h)$ blir ortogonala

b) Hitta invers till funktionen $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$

Svar.

a) $h = 0, h = 3$. b) $f^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

Uppgift 2. (max 2 p) Varje fråga ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger 0.5 p, fel svar ger -0.5 p. Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

a) Om g är en periodisk funktion så är $f \circ g$ periodisk för alla funktioner f som kan sammansätta med g

b) Om en funktion är strängt växande i sin definitionsmängd så är funktionen injektiv

c) En icke-noll vektor i planet kan inte vara ortogonal mot 3 olika icke-noll vektorer

d) Om $\mathbf{u} = (a, b)$, $\mathbf{v} = (c, d)$ och $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$ så är $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ parallella mot varandra

Svar.

a) S b) S c) F d) S

vänd sidan!

Uppgift 3. (max 3 p) Lös $x^2 + 2|x+2| - 3 \geq 0$.

Lösning. Vi har $|x+2| = x+2$ för $x \geq -2$ och $|x+2| = -x-2$ för $x < -2$. För $x \geq -2$ blir olikheten

$$x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

Eftersom $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ är föregående olikheten uppfylld för alla $x \geq -2$. För $x < -2$ får vi olikheten

$$x^2 - 2x - 7 \geq 0.$$

Eftersom $x^2 - 2x - 7 = 0$ för $x = 1 \pm 2\sqrt{2}$ då uppfylls föregående olikheten för $x \leq 1 - 2\sqrt{2}$ och $x \geq 1 + 2\sqrt{2}$. Men $1 - 2\sqrt{2} > -2$ och därmed olikheten $x^2 - 2x - 7 \geq 0$ uppfylls för alla $x < -2$. Vi drar slutsatsen att $x^2 + 2|x+2| - 3 \geq 0$ gäller för alla $x \in \mathbb{R}$. **Svar:** alla $x \in \mathbb{R}$

Uppgift 4. (max 3 p) Låt $\mathbf{u} = (1, 4, -2)$ och $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$ i en ortonormerad bas i rummet. Bestäm vinkeln $\theta \in [0, \pi]$ mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ samt den ortogonala projektion av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$

Lösning. Å ena sidan,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1, 4, -2) \cdot (2, 1, -1) = 2 + 4 + 2 = 8.$$

Å andra sidan

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos\theta = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}\cos\theta = \sqrt{126}\cos\theta.$$

Därmed $\sqrt{126}\cos\theta = 8$, d.v.s.,

$$\theta = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{126}}\right)$$

Ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$ ges av

$$\mathbf{v}_{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u} = \frac{8}{21}\mathbf{u}$$