Anteckningar för kursen "Analys i en Variabel"

Simone Calogero

Vecka 1

Viktig information. Dessa anteckningar är inte avsedda som en ersättning för kurs litteratur utan bara som en kort sammanfattning av föreläsningarna.

Innehåll

1 Förkunskaper

1.1 Olika talsystem

Talen delas upp i flera olika talsystem, eller **mängder**.

Mängden av **naturliga tal** betecknas med $\mathbb{N}$ och består av talen 0, 1, 2, och så vidare:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Vi skriver $n \in \mathbb{N}$ (n tillhör $\mathbb{N}$) för att mena att n är ett (godtyckligt) naturligt tal. Till exempel: $1 \in \mathbb{N}$, men $1.5 \notin \mathbb{N}$.

Mängden av **hela tal** består av naturliga talen och minus naturliga talen, d.v.s.,

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}.$$

Det gäller $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, d.v.s, $\mathbb{N}$ är en **delmängd** av $\mathbb{Z}$.

Rationella tal definieras som alla möjliga kvoter av hela tal, d.v.s,

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \ : \ a, b \in \mathbb{Z} \text{ och } b \neq 0\}.$$

Två olika kvoter kan identifiera samma rationellt tal, t. ex.,

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \cdots = 0.5.$$

Det gäller $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Det finns tal som inte är rationella. Till exempel:

Sats 1.1. *$\sqrt{2}$ är inte rationellt (Pythagoréerna, $\sim$ 500 fvt)*

Beviset finns i boken (exempel 23, s. 34).

α sägs vara ett **algebraiskt tal** om α är en röt till ett polynom vars koefficienter är hela tal. Till exempel $\alpha = \sqrt{2}$ är algebraiskt eftersom det löser ekvationen $\alpha^2 - 2 = 0$, d.v.s., $\sqrt{2}$ är en rot till andragradspolynom $x^2 - 2$. Låt $\mathbb{A}$ beteckna mängden av alla algebraiska tal. Eftersom rationella talen a/b, $a, b \in \mathbb{Z}$, är roten till polynomet $bx - a$ så är $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$.

Det finns tal som inte är algebraiska. Till exempel:

Sats 1.2. *π är inte algebraiskt (Lindemann, 1882)*

Ett annat exempel på icke-algebraiskt tal är e (**Nepers tal**). Talen som inte är algebraiska kallas också för **transcendentala tal**.

1.2 Talens geometriska representation

Talen kan representeras som punkter på en **rät linje**. For detta mål väljer man först två punkter som motsvarar naturliga talen 0 och 1, vilket fixar en **måttenhet** på räta linjen.

Naturligt talet 2 motsvarar till punkten på räta linjen som ligger en måttenhet till höger om talet 1. Denna punkt kan hittas med en passare genom att konstruera cirkeln med centrum på talet 1 och radie 1. Denna cirkel skär räta linjen i två punkter, en som motsvarar till talet 0 och en som motsvarar till talet 2. Hela tal kan alla hittas på räta linjen med hjälp av endast en passare.

Rationella tal kan hittas på räta linjen med hjälp av endast omarkerad linjal och passare. Till exempel för att hitta talet 1/2 på räta linjen använder man först passaren för att konstruera cirkeln med centrum 0 och radie 1 och cirkeln med centrum 1 och radie 1. Dessa två cirklar skär varandra i två punkter, en ovanför linjen och en under linjen. Sedan använder man omarkerad linjalen för att rita upp sträckan mellan dessa två punkter. Skärningspunkten mellan denna sträcka och räta linjen motsvarar till rationella talet $1/2$.

Algebraiska talet $\sqrt{2}$ kan också hittas på räta linjen med hjälp av endast omarkerad linjal och passare. För detta konstruerar man först kvadraten vars basen är sträckan mellan punkterna 0 och 1 på räta linjen (vilket naturligtvis kan göras med omarkerad linjal och passare). Enligt Pythagoras sats är längden på diagonalen till denna kvadrat lika med $\sqrt{2}$. Sedan använder man passaren för att konstruera cirkeln med centrum på talet 0 och radie $\sqrt{2}$. Skärningspunkterna mellan denna cirkel och räta linjen motsvarar till talen $\pm\sqrt{2}$ på räta linjen.

Det kan visas att de punkterna på räta linjen som kan hittas med endast omarkerad linjal och passare är precis de algebraiska talen. Transcendentala tal kan *inte* hittas på räta linjen på detta vis. Till exempel, enligt Lindemanns Sats 1.2, talet π kan inte hittas på räta linjen med endast omarkerad linjal och passare, vilket löser ett matematiskt problem som var öppet i mer än 2000 år, nämligen **cirkelns kvadratur problem**. Detta problem består av att med hjälp av endast omarkerad linjal och passare konstruera en kvadrat med arean π (d.v.s., samma area som en cirkel med radie 1). Eftersom π är inte algebraisk då är cirkelns kvadratur omöjligt.

Mängden av tal som motsvarar alla punkter på räta linjen betecknas med $\mathbb{R}$ och deras element kallas för **reella tal**.

1.3 Algebraisk räkning

För att lyckas i den här kursen måste man kunna hantera enkla algebraiska räkningar, till exempel:

(i) **Kvadrerings regel**. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, for alla $a, b \in \mathbb{R}$;

(ii) **Kubik regel**. $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$, for alla $a, b \in \mathbb{R}$;

(iii) **Konjugat regel**. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, for alla $a, b \in \mathbb{R}$;

(iv) **Faktorisering**. T. ex.

$$\begin{aligned} a^3 - 2a^2b + ab^2 - a + b &= a(a^2 - 2ab + b^2) - a + b \\ &= a(a-b)^2 - (a-b) = (a-b)[a(a-b) - 1]. \end{aligned}$$

(v) **Räkning med bråk**. T. ex.

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b}\frac{d}{c}, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd},$$

och så vidare.

1.4 Andragradsekvationer

Givna $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, kallas uttrycket $p(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, för ett **andragradspolynom**. För $a = 0$ blir $p(x)$ ett **förstagradspolynom**. Ett reellt tal $x_0 \in \mathbb{R}$ kallas för ett **nollställe** (eller en **rot**) till $p(x)$ om $p(x_0) = 0$, d.v.s., x_0 är en lösning till **andragradsekvation**

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Denna ekvation kan ha 2 lösningar, 1 lösning, eller ingen lösning (obs: lösning $\equiv$ reell lösning i denna kurs). Vilket fall gäller beror på **diskriminanten**:

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

De följande reglerna gäller:

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\Rightarrow p(x) = 0 \text{ har två lösningar} \\ \Delta = 0 &\Rightarrow p(x) = 0 \text{ har en lösning} \\ \Delta < 0 &\Rightarrow p(x) = 0 \text{ har ingen lösning} \end{aligned}$$

När $\Delta \geq 0$ ges lösningarna till $ax^2 + bx + c = 0$ av

$$x_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Om $\Delta = 0$ så är $x_+ = x_- = -b/2a$, och därmed finns endast en lösning.

Exempel. $p(x) = 3x^2 + 8x - 4$. $\Delta = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 64 + 48 = 112 > 0$, och så har $p(x) = 0$ två lösningar:

$$x_\pm = \frac{-8 \pm \sqrt{112}}{6} = \frac{-8 \pm \sqrt{16 \cdot 7}}{6} = \frac{-8 \pm 4\sqrt{7}}{6} = -\frac{4}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{7}$$

Uppgift 1.1. *Hitta lösningarna till*

$$x^4 - 8x^2 + 9 = 0.$$

Svar: $x_1 = -\sqrt{4 - \sqrt{7}}, x_2 = \sqrt{4 - \sqrt{7}}, x_3 = -\sqrt{4 + \sqrt{7}}, x_4 = \sqrt{4 + \sqrt{7}}$

1.5 Räta linjer

Givna två punkter A, B finns endast en rät linje som passar genom A och B. Anta att vi fixar ett **rätvinkligt koordinatsystem** så att A, B har koordinaterna $A = (0, 0)$, $B = (3, 4)$. Vi vill hitta ekvationen till den räta linjen som går genom A, B. Allmänna ekvationen för en rät linje kan skrivas som

$$y = kx + m$$

där $k, m \in \mathbb{R}$. k kallas **riktningskoefficient**. Eftersom linjen passar genom A, B då måste ekvationen för räta linjen uppfyllas när $x = 0$, $y = 0$ och när $x = 3$, $y = 4$. För $x = y = 0$ får vi $m = 0$, alltså har ekvationen formen $y = kx$. Genom att ersätta $x = 3$ och $y = 4$ får vi $4 = 3k$, d.v.s., $k = 4/3$. Ekvationen för räta linjen som passar genom $A = (0, 0)$ och $B = (3, 4)$ är då $y = \frac{4}{3}x$.

Uppgift 1.2. *Hitta ekvationen till räta linjen som passar genom punkterna* $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_1, y_1)$ *i planet.*

1.6 Parabel

Grafen till polynomet $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, kallas **parabel**. När $a > 0$ är parabel **konvex**, d.v.s., grafen har uppåt konkavitet, medan för $a < 0$ är parabeln **konkav**, d.v.s., konkavitet är neråt (rita bilden). När $\Delta > 0$ har parabeln två skärningspunkter med x-axeln, nämligen punkterna $(x_-, 0)$ och $(x_+, 0)$ där $x_\pm$ är lösningarna till $p(x) = 0$; för $\Delta = 0$ skär parabeln x-axeln vid endast en punkt, nämligen punkten $(x_0, 0)$ där x_0 är den enda lösningen till $p(x) = 0$. För $\Delta < 0$ skär parabeln inte x-axeln.

Uppgift 1.3. *Hitta skärningspunkterna mellan parabeln* $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ *och räta linjen* $y = x + \frac{1}{2}$. *Visa resultatet på ett koordinatsystem.*

Lösning: x-koordinaten till skärningspunkterna hittas genom att lösa

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = x + \frac{1}{2}, \ \textit{d.v.s.,}\ x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Eftersom $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ *finns det endast en skärningspunkt vid* $(-1, -1/2)$. *Därför är räta linjen tangent till parabeln.*

1.7 Olikheter

Till exempel, låt $a \neq 0$ och betrakta olikheten

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Genom att titta på grafen till polynomet $p(x) = ax^2 + bx + c$ ser vi att lösningen beror på tecknet av a och Δ.

För $a > 0$ och $\Delta > 0$ gäller $p(x) > 0$ om $x < x_-$ och $x > x_+$, där $x_\pm$ är lösningarna till $p(x) = 0$. Får $a > 0$ och $\Delta = 0$ är $p(x) > 0$ för alla $x \neq x_0$, där x_0 är (den enda) lösningen till $p(x) = 0$. För $a > 0$ och $\Delta < 0$ gäller $p(x) > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Uppgift 1.4. *Studera* $p(x) = ax^2 + bx + c > 0$ *när* $a < 0$.

1.8 Delmängder av $\mathbb{R}$

Om A är en delmängd av $\mathbb{R}$, d.v.s., $A \subset \mathbb{R}$, och $B \subset \mathbb{R}$, då står $A \cup B$ för **unionen** mellan A och B och $A \cap B$ står för **snittet** mellan A och B. T. ex., om

$$A = \{0, 1, 1.5, 7, 8\}, \quad B = \{0, 1.5, 3, 5\}$$

så är $A \cup B = \{0, 1, 1.5, 3, 5, 7, 8\}$ och $A \cap B = \{0, 1.5\}$.

Om $a, b \in \mathbb{R}$ så att $b > a$, då står (a, b) för **öppna intervallet**[1] mellan a och b, d.v.s., mängden av reella tal x som uppfyller $a < x < b$. På liknande sätt har vi

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \quad [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Intervallet $[a, b]$ sägs vara **slutet**, medan $[a, b)$ och $(a, b]$ sägs vara **halvöppna** (bara en ändpunkt ingår i intervallet)

Intervallen ovan sägs vara **begränsat**. Mängden av alla $x \in \mathbb{R}$ så att $x > a$ sägs vara ett **obegränsat** intervall och betecknas (a, ∞). På liknande sätt

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

är ett obegränsat intervall. Dessutom $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Mängden som inte innehåller några element kallas för den **tomma mängden** och betecknas med $\emptyset$. T. ex., $(0, 1) \cap (2, 3) = \emptyset$.

Uppgift 1.5. *Vad är*

$$(0, 1] \cup (1, 4), \quad [-1, 9) \cup [8, 9], \quad (0, 1) \cap (\frac{1}{2}, 1], \quad (2, 3] \cap (3, 5)$$

Svar: $(0, 4)$, $[-1, 9]$, $(\frac{1}{2}, 1)$, $\emptyset$.

[1] En annan vanlig notation för öppna intervall, som används t. ex. i kursboken, är $]a, b[$.