Anteckningar för kursen "Analys i en Variabel"

Simone Calogero

Vecka 2

Viktig information. Dessa anteckningar är inte avsedda som en ersättning för kurs litteratur utan bara som en kort sammanfattning av föreläsningarna.

Innehåll

1 Funktioner

1.1 Funktionsbegrepp

Vi har redan definierad andragradspolynom, t. ex. $p(x) = 3x^2 + 1$. Vi kan tänka på detta polynom som en regel för att transformera reella tal till reella tal. Denna regel verkar på variabeln x enligt följande stegen

1. kvadrera x
2. multiplicera resultatet av steg 1 med 3
3. addera 1 till resultatet av steg 2

Vi kan beteckna denna kedja av regler som

$$x \to x^2 \to 3x^2 \to 3x^2 + 1.$$

Till exempel, för $x = 1$ får vi $p(1) = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4$, d.v.s., polynomet p transformerar talet 1 till talet 4. Notera att det spelar ingen roll vilken bokstav man använder för polynoms variabel. Till exempel definierar uttrycket

$$p(y) = 3y^2 + 1$$

samma polynomet p som förut eftersom reglerna som beskriver hur reella talen transformeras har inte ändrats. I själva verket får man skriva polynomet också som

$$p() = 3()^2 + 1$$

d.v.s., utan att ange någon symbol för polynoms variabel. Nu kan vi införa allmänna definitionen av reella funktioner av reella tal.

Definition 1.1. *En* **reell funktion av reella tal** *med* **definitionsmängd** $D \subseteq \mathbb{R}$ *är en regel som till varje reellt tal i* D *på ett entydigt sätt ordnar ett reellt tal.*

Från och med nu använder vi ordet *funktion* för att mena alltid *reell funktion av reella tal* (alla funktioner som vi betraktar i denna kurs är reella funktioner av reella tal)

Vi skriver

$$f : D \to \mathbb{R}$$

för att mena att f är en funktion definieras på D. Om $x \in D$ betecknar vi $f(x) \in \mathbb{R}$ värdet av f i x. Vanligen antar man att D är den största delmängden av $\mathbb{R}$ då f kan definieras men D kan också vara en mindre mängd. Till exempel $f(x) = \sqrt{x+1}$ kan definieras på alla mängder $D \subseteq [-1, \infty)$.

Notera nog att för att definiera en funktion måste man ange båda $f(x)$ *och* definitionsmängden. Till exempel,

$$f : [-1, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt{x+1}$$

och

$$g : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \sqrt{x+1}$$

är två olika funktioner.

Notera också att en funktion f kan inte ordna två olika tal till samma $x \in \mathbb{R}$. T. ex.,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 1 \\ -x & \text{då } x \leq 1 \end{cases}$$

definierar *inte* en funktion, eftersom $f(1)$ är inte entydigt definierad vid $x = 1$ (det kan vara 1 eller -1).

Värdemängden av f är mängden av alla möjliga värden av $f(x)$ när x varierar i definitionsmängd av f, d.v.s.,

$$V = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), \text{ för någon } x \in D\}.$$

Värdemängden kan härledas från definitionsmängden och formeln för $f(x)$. **Grafen** till en funktion f är mängden av alla punkter i planet med koordinater $(x, f(x))$, då $x \in D$. Man säger också att $y = f(x)$ är **funktionskurvan** av $f(x)$.

1.2 Exempel på funktioner

1. Funktionen $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieras av $I(x) = x$ kallas för **identitet** funktion. Den här funktionen ändrar inte värdet av variabeln x. Grafen är räta linjen $y = x$.

2. Funktionen som till alla reella tal $x \in \mathbb{R}$ ordnar ett givet reellt tal $c \in \mathbb{R}$ kallas för **konstant funktion**. Med andra ord, en funktion f är en konstant funktion om värdemängden för f består av endast ett reellt tal, t. ex., $f(x) = 2$. Rita grafen.

3. Funktionen $H : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definieras av

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{då } x < 0 \\ 1 & \text{då } x > 0 \end{cases}$$

   kallas för **stegfunktion** (eller Heaviside funktion). Vi har $V = \{0, 1\}$. Rita grafen.

4. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieras av

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

   kallas för **absolutbeloppet** av reella talet x och betecknas med $|x|$ (d.v.s, vi skriver $|x|$ i stället för $f(x)$). Notera att $V = [0, \infty)$. Rita grafen.

Uppgift 1.1. *Lös $x^2 + 2|x + 2| - 3 \geq 0$.*

Lösning: Vi har $|x + 2| = x + 2$ för $x \geq -2$ och $|x + 2| = -x - 2$ för $x < -2$. För $x \geq -2$ blir olikheten

$$x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

Eftersom $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ är föregående olikheten uppfylld för alla $x \geq -2$. För $x < -2$ får vi olikheten

$$x^2 - 2x - 7 \geq 0.$$

Eftersom $x^2 - 2x - 7 = 0$ för $x = 1 \pm 2\sqrt{2}$ då uppfylls föregående olikheten för $x \leq 1 - 2\sqrt{2}$ och $x \geq 1 + 2\sqrt{2}$. Men $1 - 2\sqrt{2} > -2$ och därmed olikheten $x^2 - 2x - 7 \geq 0$ uppfylls för alla $x < -2$. Vi drar slutsatsen att $x^2 + 2|x + 2| - 3 \geq 0$ gäller för alla $x \in \mathbb{R}$.

Funktioner kan addera och multiplicera enligt följande definitionen:

Definition 1.2. *Om f, g är två funktioner med definitionsmängder D_f, D_g. Då är $f + g : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$ och $fg : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$ funktionerna*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Exempel: Om $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, och $g(x) = \sqrt{x+1}$, $x \geq -1$, så är $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^3 + \sqrt{x+1}$ och $(fg)(x) = f(x)g(x) = x^3\sqrt{x+1}$, för $x \geq -1$. Notera att två funktioner kan adderas eller multipliceras endast på en mängd då är både definierad! Till exempel, $\sqrt{1 - |x|}$ och $\sqrt{|x| - 2}$ kan inte adderas/multipliceras.

På liknande sätt kan man definiera kvoten av två funktioner f, g, d.v.s., $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$. I definitionsmängden av f/g måste man exkludera reella talen x då $g(x) = 0$. Till exempel, om $f(x) = x^3$ och $g(x) = \sqrt{x+1}$ då är f/g funktionen

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}$$

vilken kan definieras för alla $x > -1$.

Uppgift 1.2. *Skissera grafen till funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } x \geq 1 \\ (x-2)^2 & \text{då } -1 \leq x < 1 \\ x & \text{då } x < -1 \end{cases}$$

Vad är värdemängden till f?

1.3 Polynom och rationella funktioner

Vi har redan definierad första- och andragradspolynom. Polynomen av högre grad definieras som följer:

Definition 1.3. *Ett polynom är ett funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som kan skrivas på formen*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

för något naturligt tal $n \geq 1$ och reella tal $a_0, \ldots, a_n$, som kallas polynoms **koefficienter**. *Graden till p betecknas med $\deg p$ (degree av p på engelska) och är lika med det största naturliga talet $m \geq 1$ så att $a_m \neq 0$. (Med andra ord är $\deg p$ den största potensen av x som finns i polynomet).*

Till exempel är $3x^4 + 2x + 5$ ett polynom med graden 4. Notera att för $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ reduceras polynomen till konstant funktionen $p(x) = a_0$.

Definition 1.4. *En funktion med formen*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

då $p(x), q(x)$ är två polynom kallas för **rationella funktion**.

Alltså är rationella funktioner kvoter av polynom (precis som rationella tal är kvoter av hela tal). T. ex.

$$f(x) = \frac{3x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

är en rationell funktion. Den största möjliga definitionsmängden för denna funktion är $D = \mathbb{R}$, eftersom polynomet i nämnaren är alltid skilt från noll (alltid positiv). Funktionen

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x + 1}$$

är en rationell funktion definierad för $x \neq -1$, d.v.s. $D = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ är den största möjliga definitionsmängd. Reellt tal $x = -1$ sägs vara en **singularitet** av funktionen f.

Innan man kan bestämma definitionsmängden av en rationell funktion skulle man förenkla funktionen. Till exempel låt

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

När f skrivs på denna form, d.v.s., som kvoten av polynom $x^2 - 1$ och $x - 1$, verkar det att det finns en singularitet vid $x = 1$. Men eftersom $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ då kan man förkorta f till uttrycket

$$f(x) = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1,$$

och därmed ser man att $x = 1$ inte är en riktig singularitet.

Uppgift 1.3. *Låt*

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad g(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$$

Visa att $h = f + g$ är en rationell funktion och bestäm singulariteter av h.

Lösning: Vi har

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{1}{(x + 1)(x - 1)} + \frac{x + 1}{x - 1} \\ &= \frac{1 + (x + 1)^2}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

Därmed är $h = f + g$ en rationell funktion med singulariteter $x = -1$ och $x = 1$.

Uppgift 1.4. *Låt $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ och $q(x) = x^3 - x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$. Bestäm den största möjliga definitionsmängden till rationella funktionen $f(x) = p(x)/q(x)$.*

Lösning: Innan vi kan bestämma definitionsmängden måste vi förkorta funktionen f. Vi har

$$f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x(x^2 - x - 2)}$$

Vi faktoriserar nu polynomet $x^2 - x - 2$. Eftersom $x^2 - x - 2 = 0$ för $x = 2$ och $x = -1$ då är $x^2 - x - 2 = a(x-2)(x+1)$, för något reellt tal $a \in \mathbb{R}$. Notera att a är lika med koefficienten till x^2 i polynomet $a(x-2)(x+1)$. Denna koefficient måste lika motsvarande koefficienten i polynomet $x^2 - x - 2$, d.v.s., $a = 1$. Därmed $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. Nu faktoriserar vi polynomet $p(x)$ i täljaren. Låt $y = x^2$ i polynomet $p(x)$. Då får vi andragradspolynom $y^2 - 5y + 4$, vilket kan skrivas som $(y-4)(y-1)$. Därmed är $p(x) = (x^2-4)(x^2-1) = (x+2)(x-2)(x-1)(x+1)$. Därför

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-2)(x-1)(x+1)}{x(x-2)(x+1)} = \frac{(x+2)(x-1)}{x}.$$

Det följer att den största möjliga definitionsmängden till f är lika med $x \neq 0$, d.v.s., $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

2 Polynoms division

Vi illustrerar polynoms division med exempel.

Exempel 1. Dividera $f(x) = 2x^4 + 6x^2 + 2$ med $g(x) = x^2 + x + 1$. Alltså vill vi beräkna

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^4 + 6x^2 + 2}{x^2 + x + 1}.$$

I första steget delar vi den högsta graden termen i täljaren med den högsta graden termen i nämnaren, d.v.s., $2x^4/x^2 = 2x^2$. I andra steget beräknar vi polynomet $r_1(x)$ så att

$$f(x) = 2x^2 g(x) + r_1(x). \tag{1}$$

Vi får

$$r_1(x) = f(x) - 2x^2 g(x) = 2x^4 + 6x^2 + 2 - 2x^2(x^2 + x + 1) = -2x^3 + 4x^2 + 2.$$

Notera att $\deg r_1 < \deg f$. Så nu har vi

$$\frac{2x^4 + 6x^2 + 2}{x^2 + x + 1} = \frac{2x^2(x^2 + x + 1) + r_1(x)}{x^2 + x + 1} = 2x^2 + \frac{r_1(x)}{x^2 + x + 1}.$$

Därför måste vi nu dividera $r_1(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2$ med $x^2 + x + 1$. Som förut börjar vi med högsta graden termerna: $-2x^3/x^2 = -2x$ och då letar vi efter polynomet $r_2(x)$ så att

$$r_1(x) = -2xg(x) + r_2(x). \tag{2}$$

Nu får vi $r_2(x) = 6x^2 + 2x + 2$; notera att $\deg r_2 < \deg r_1$. Genom att ersätta (2) i (1) får vi

$$f(x) = 2x^2(x^2 + x + 1) - 2x(x^2 + x + 1) + r_2(x) \tag{3}$$

och därmed

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 2x^2 - 2x + \frac{r_2(x)}{x^2 + x + 1}.$$

Den sista termen behandlas på liknande sätt. Vi räknar $6x^2/x^2 = 6$ och därmed

$$r_2(x) = 6(x^2 + x + 1) + r_3(x), \quad \text{då } r_3(x) = -4x - 4.$$

Genom att ersätta i (3) får vi

$$f(x) = 2x^2(x^2 + x + 1) - 2x(x^2 + x + 1) + 6(x^2 + x + 1) + r_3(x).$$

Eftersom $\deg r_3 = 1 < \deg g$ går det inte att dividera r_3 med g och därmed stoppar vi algoritmen. Därför är vårt slutresultat för divisionen $f(x)/g(x)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 2x^2 - 2x + 6 + \frac{-4x - 4}{x^2 + x + 1}.$$

Vi kan omskriva resultatet som

$$f(x) = (2x^2 - 2x + 6)g(x) + (-4x - 4) = q(x)g(x) + r(x).$$

Polynomet $q(x) = 2x^2 - 2x + 6$ kallas **kvoten** och $r(x) = -4x - 4$ kallas **resten** vid division av $f(x)$ med $g(x)$.

Exempel 2 (Polynoms faktorisering). I föregående exemplet såg vi hur man räknar ut kvoten och resten i polynoms division. Nu studerar vi hur man **faktoriserar** polynom. Ett polynom $g(x)$ sägs vara en faktor för polynomet $f(x)$ om $\deg g < \deg f$ och om det finns ett polynom $q(x)$ så att $f(x) = q(x)g(x)$. Med annat ord, g är en faktor till f om resten av divisionen $f(x)/g(x)$ är noll. Uttrycket $f(x) = q(x)g(x)$ kallas för en faktorisering av f. Notera att $\deg q$ och $\deg g$ är båda mindre än $\deg f$. Därför innebär faktorisering att omskriva ett polynom som produkt av 2 (eller fler) polynom med mindre grad. Hur vet vi om ett polynom kan faktoriseras? vi har den följande satsen:

Sats 2.1. *Ett reellt tal α är en rot till polynomet f, d.v.s., $f(\alpha) = 0$ om och endast om är polynomet $x - \alpha$ en faktor för $f(x)$, d.v.s., $f(x) = (x - \alpha)q(x)$ för något polynom $q(x)$.*

Till exempel låt $f(x) = x^3 + x - 2$. Eftersom $f(1) = 0$, det måste finna (enligt satsen) ett polynom $q(x)$ så att $f(x) = (x - 1)q(x)$. För att beräkna $q(x)$ använder vi algoritmen illustrerades i exempel 1. Vi har

$$q(x) = \frac{f(x)}{x - 1} = x^2 + x + 2.$$

Därför är $x^3 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2)$. Eftersom $x^2 + x + 2 > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ går det inte att ytterligare faktorisera polynomet.