Anteckningar för kursen "Analys i en Variabel"

Simone Calogero

Vecka 3

Viktig information. Dessa anteckningar är inte avsedda som en ersättning för kurs litteratur utan bara som en kort sammanfattning av föreläsningarna.

Innehåll

1 Sammansatt funktion

Låt $f : D_f \to \mathbb{R}$ och $g : D_g \to \mathbb{R}$ vara två funktioner med värdemängder V_f och V_g. Funktionen f transformerar reella tal $x \in D_f$ till reella tal $f(x) \in V_f$. Om $V_f \subseteq D_g$ då får vi ytterligare transformera $f(x)$ med funktionen g, d.v.s., vi kan räkna ut $g(f(x))$:

$$x \in D_f \to f(x) \in V_f \to g(f(x)) \in V_g$$

Därför får vi en regel för att transformera reella talet $x \in D_f$ till reella talet $g(f(x)) \in V_g$, d.v.s., en funktion $h : D_f \to \mathbb{R}$ med regeln $h(x) = g(f(x))$.

Definition 1.1. *Låt $f : D_f \to \mathbb{R}$ och $g : D_g \to \mathbb{R}$ så att $V_f \subseteq D_g$. Funktionen $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$ ges av*

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

kallas för **sammansatt funktion** *av g med f.*

Exempel

1. $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+1}$ och $g:(-\infty,1)\cup(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{x-1}$. Eftersom $V_f=(1,\infty)\subset D_g$ existerar funktionen $g\circ f$ och vi har
$$g(f(x))=\frac{1}{f(x)-1}=\frac{1}{\sqrt{x+1}-1},\quad x\in D_f=(0,\infty).$$
Notera att det går inte att definiera $f\circ g$ (d.v.s., funktionen $f(g(x))$) eftersom $V_g=\mathbb{R}$ men f är inte definierad för $x\leq 0$.

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^3$. Vi har $V_f=V_g=\mathbb{R}$ och därmed kan vi räkna ut båda $f\circ g$ och $g\circ f$. Vi har
$$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g\circ f(x)=g(f(x))=f(x)^3=(2x+1)^3$$
$$f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f\circ g(x)=f(g(x))=2g(x)+1=2x^3+1$$
Notera att $f\circ g\neq g\circ f$, d.v.s., sammansättning av funktioner är inte en kommutativ operation!

3. Ibland (sällan...) kan $f\circ g$ och $g\circ f$ ger samma funktion. T. ex., för $f(x)=2x$ och $g(x)=4x$ får vi $g(f(x))=f(g(x))=8x$. Men i allmänhet gäller $f\circ g\neq g\circ f$, se exempel 2.

Uppgift 1.1. *Skissera graferna av $p\circ H$ och $H\circ p$ då H är stegfunktionen*[1] *och p är polynomet $p(x)=x^2-x-6$.*

Lösning: Vi har
$$(p\circ H)(x)=p(H(x))=H(x)^2-H(x)-6=\begin{cases}1-1-6=-6 & \text{då } x>0\\ 0-0-6=-6 & \text{då } x<0\end{cases}$$
d.v.s., $(p\circ H)(x)=-6$, för $x\neq 0$; funktionen $p\circ H$ inte definieras för $x=0$.
$$(H\circ p)(x)=H(p(x))=H(x^2-x-6)$$
Eftersom $p(x)<0$ för $-2<x<3$, och $p(x)>0$ för $x<-2$ eller $x>3$, då har vi
$$(H\circ p)(x)\begin{cases}0 & \text{för } x\in(-2,3)\\ 1 & \text{för } x\in(-\infty,-2)\cup(3,\infty)\end{cases}$$
Funktionen $H\circ p$ definieras inte för $x=-2$ och $x=3$.

[1] $H:(-\infty,0)\cup(0,\infty)\to\{0,1\},\quad H(x)=0$ om $x<0$ och $H(x)=1$ om $x>0$.

2 Invers funktion

Vi såg att funktioner transformera reella tal $x \in D$ till reella tal $y = f(x) \in V$ på ett entydigt sätt, d.v.s., f kan inte ordna två olika tal till en given x. Nu frågar vi oss om given ett reellt tal $y \in V$ finns det ett unik $x \in D$ så att $y = f(x)$. Svaret är i allmänhet *nej*. Till exempel, för $f(x) = x^2$, och $y = 1$, finns två värden av x så att $y = f(x)$, nämligen $x = 1$ och $x = -1$.

Definition 2.1. *En funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sägs vara* **injektiv** *i mängden $U \subseteq D$ om*

$$x_1, x_2 \in U \quad \text{och} \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

På ekvivalent sätt kan man säga att en funktion $f : D \to \mathbb{R}$ är injektiv i U om given $y \in V$ har ekvationen $f(x) = y$ precis en lösning $x \in U$. I tillämpningarna är U ofta ett intervall, eller unionen av intervall. I detta fall kan man bestämma om en funktion är injektiv genom att titta på funktionens grafen. I själva verket har vi den följande uppenbara satsen:

Sats 2.1. *En funktion $f : D \to \mathbb{R}$ är injektiv på ett intervall $I \subseteq D$ om och endast om f är antigen* **strängt växande** *eller* **strängt avtagande** *på intervallet I.*

Kom ihåg att en funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sägs vara strängt växande i mängden $U \subset D$ om för alla $x_1, x_2 \in U$ så att $x_1 < x_2$ gäller att $f(x_1) < f(x_2)$; om $f(x_1) > f(x_2)$ så är f strängt avtagande.

Uppgift 2.1. *Bestäm i vilka intervallen är funktionen $f(x) = |x^2 - 1|,\ x \in \mathbb{R}$, injektiv.*

Lösning: Vi skisserar grafen till f och kollar i vilka intervall är f strängt växande eller strängt avtagande. För att bestämma grafen av f ritar vi först parabeln $y = x^2 - 1$ och sedan speglar vi den negativa delen av grafen i $x-$axeln. Från ritade grafen ser man att f är strängt växande för $x \in [-1, 0]$ och $x \in [1, \infty)$ och strängt avtagande för $x \in (-\infty, -1]$ och $x \in [0, 1]$. Därför är f injektiv i intervallen

$$I_1 = (-\infty, -1], \quad I_2 = [-1, 0], \quad I_3 = [0, 1], \quad I_4 = [1, \infty).$$

Om f är injektiv i sin definitionsmängd D så motsvarar till varje $y \in V$ en och endast en $x \in D$ så att $y = f(x)$ och vi skriver

$$x = f^{-1}(y)$$

för värdet av x så att $f(x) = y$. Med annat ord

$$y = f(x) \quad \text{om och endast om } x = f^{-1}(y)$$

f^{-1} definierar en regel som till $y \in V$ på ett entydigt sätt ordnar ett reellt tal $x \in D$. Därför f^{-1} definierar en funktion som kallas **invers funktion** till f (eller invers till f). Notera att:

$$\text{Definitionsmängden av } f = \text{Värdemängden av } f^{-1} \quad \text{d.v.s. } D_f = V_{f^{-1}}$$

och

$$\text{Definitionsmängden av } f^{-1} = \text{Värdemängden av } f \quad \text{d.v.s. } D_{f^{-1}} = V_f$$

och dessutom $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ (identitet funktion).

Definition 2.2. *Låt $f : D \to \mathbb{R}$ vara injektiv i D. Den unika funktionen $f^{-1} : V \to \mathbb{R}$ så att $f \circ f^{-1} = I$ kallas invers funktion till f.*

Låt oss titta på några exempel på hur man bestämmer inversen till en injektiv funktion.

Exempel 1. Invers till $f(x) = 3x+2$. Eftersom $3x+2 = y$ om och endast om $x = (y-2)/3$, så är $f^{-1}(y) = (y-2)/3$ med definitionsmängd $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} = V_f$

Exempel 2. Inversen till $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + 1/x$. Notera att f kan definieras också för $x < 0$, men vi gör inte så. Genom att lösa $1 + 1/x = y$ får vi $x = \frac{1}{y-1} = f^{-1}(y)$. Eftersom $x > 0$ gäller i definitionsmängd av f då är $D_{f^{-1}} = (1,\infty)$

Exempel 3. $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Vi har sett att $f(x) = x^2$ kan inte invertera i hela $\mathbb{R}$. Men om vi begränsar funktionen på mängden $x \geq 0$ så får vi en injektiv funktion och vi har $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Exempel 4. Grafen till invers funktion. Låt $f : D \to \mathbb{R}$ vara injektiv. Grafen av f^{-1} erhålls genom att spegla funktionskurvan $y = f(x)$ i linjen $y = x$. RITA ETT EXEMPEL.

Uppgift 2.2. *Bestäm i vilka intervallen är funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv, då*

$$f(x) = |x^2 - 1|$$

Hitta inversen till f i varje intervallet då f är injektiv.

Lösning: Vi såg i Uppgiften 2.1 att f är injektiv i intervallen

$$I_1 = (-\infty,-1], \quad I_2 = [-1,0], \quad I_3 = [0,1], \quad I_4 = [1,\infty).$$

I vart och ett intervall hittar vi invers till f genom att lösa $|x^2-1| = y$. I intervallen I_1 och I_4 är $x^2 - 1 > 0$ och därmed blir $|x^2-1| = y$ ekvationen $x^2 - 1 = y$, d.v.s., $x = \pm\sqrt{1+y}$. Notera att $y \geq 0$ i hela värdemängden av f och därmed $y \geq 0$ i definitionsmängden av f^{-1} i varje intervall. Eftersom $x < 0$ i I_1 och $x > 0$ i I_4 då får vi

$$f^{-1}(y) = -\sqrt{1+y} \quad i\ I_1, \quad f^{-1}(y) = \sqrt{1+y} \quad i\ I_4$$

För $x \in I_2 \cup I_3$ blir $|x^2-1| = y$ ekvationen $1 - x^2 = y$, d.v.s., $x = \pm\sqrt{1-y}$. Notera att $0 \leq y \leq 1$ i värdemängden av f då $-1 \leq x \leq 1$ och därmed $0 \leq y \leq 1$ i definitionsmängden av f^{-1} i I_2 eller I_3. Eftersom $x \leq 0$ i I_2 och $x \geq 0$ i I_3 då får vi

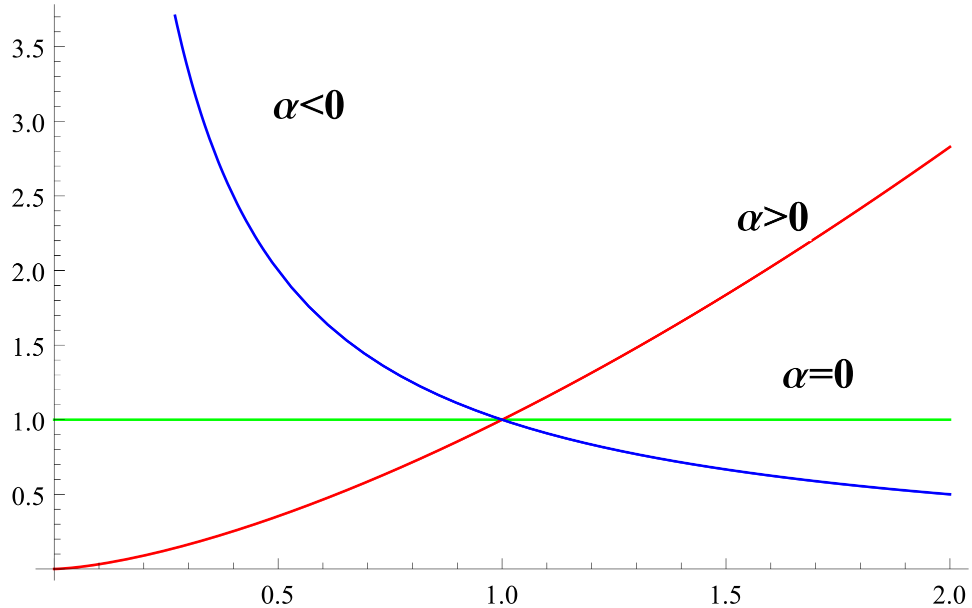
$$f^{-1}(y) = -\sqrt{1-y} \quad i\ I_2, \quad f^{-1}(y) = \sqrt{1-y} \quad i\ I_3$$

Notera noggrant att f inte är inverterbar i hela sin definitionsmängd! f kan inverteras endast efter vi begränsar funktionen på ett av intervallen I_1, I_2, I_3, I_4.

2.1 Några elementära funktioner

1. **Potensfunktion** Given $\alpha \in \mathbb{R}$ definieras **potensfunktionen** $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ som $f(x) = x^\alpha$. OBS: När $\alpha \in \mathbb{N}$ får potensfunktionen definieras också för $x \leq 0$, men i allmänhet är detta inte möjligt.

   Grafen till potensfunktionen $f(x) = x^\alpha$, för tre olika värden av α, visas i figuren.

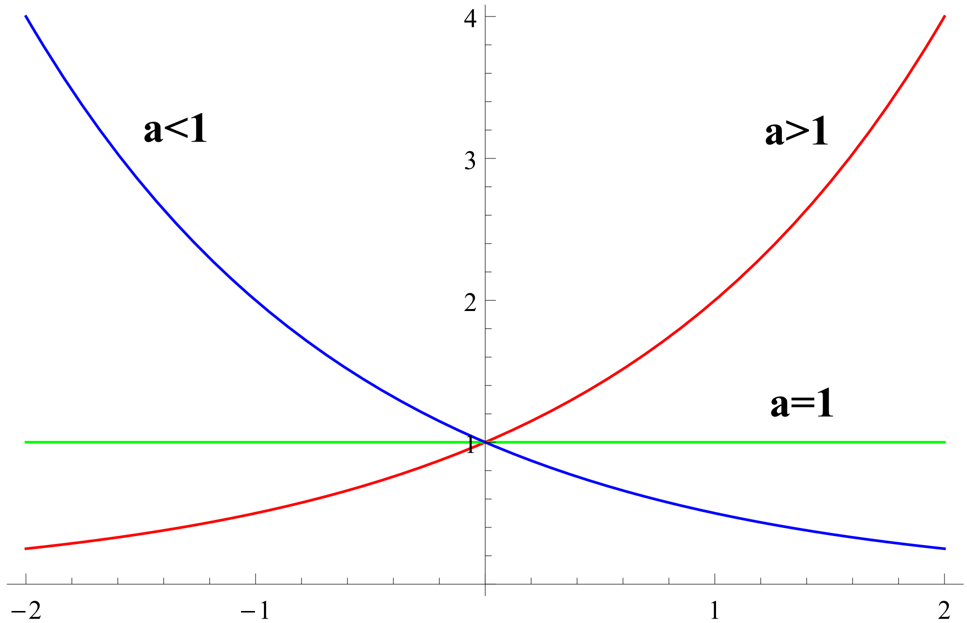
   Notera att för $\alpha > 0$ är potensfunktionen strängt växande, medan för $\alpha < 0$ är potensfunktionen strängt avtagande. Därför är potensfunktionen injektiv för $\alpha \neq 0$ (för $\alpha = 0$ får vi $x^\alpha = 1$, konstantfunktion). Invers funktion ges av

   $$f^{-1}(y) = y^{1/\alpha}, \quad \text{för } \alpha \neq 0$$

   Notera att invers till en potens funktion är också en potens funktion. Kom ihåg också de viktiga potensreglerna:

   $$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

2. **Exponentialfunktion**. Given $a > 0$ definieras exponentialfunktion med bas a som $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$. För $a = 1$ får vi konstantfunktion $f(x) = 1$. Grafen för tre olika värd av a visas i figuren:



För $a > 1$ är exponentialfunktion strängt växande, medan för $a < 1$ är den strängt avtagande. Därför är exponentialfunktion injektiv för $a \neq 1$. Invers funktion ges av logaritmfunktion, som studeras nedan. Kom ihåg att

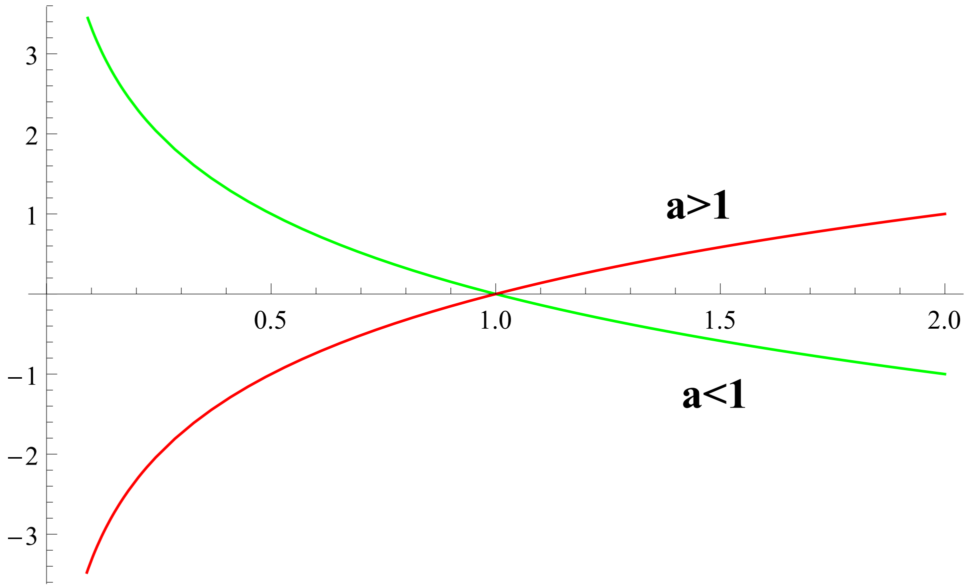
$$a^x b^x = (ab)^x$$

Exponentialfunktionen med basen e ($e = 2.718\ldots$) spelar en särskild viktig roll. I själva verket när man pratar av exponentialfunktion utan att ange en bas betyder det att basen är e, d.v.s., e^x.

3. **Logaritmfunktion** Låt $a > 0$, $a \neq 1$. Logaritmen funktion med bas a, $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definieras som invers funktionen till exponentialfunktion $f(x) = a^x$, d.v.s., $\log_a x$ uppfyller

$$f(\log_a x) = x, \quad \text{d.v.s,} \quad a^{\log_a x} = x.$$

Grafen till $\log_a$ är speglingen av grafen till a^x med avseende på räta linjen $y = x$ som visas i figuren:



Vi får omedelbart att $\log_a x$ är strängt växande för $a > 1$ och strängt avtagande för $a < 1$. Dessutom

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad BEVIS : a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy = a^{\log_a(xy)}$$

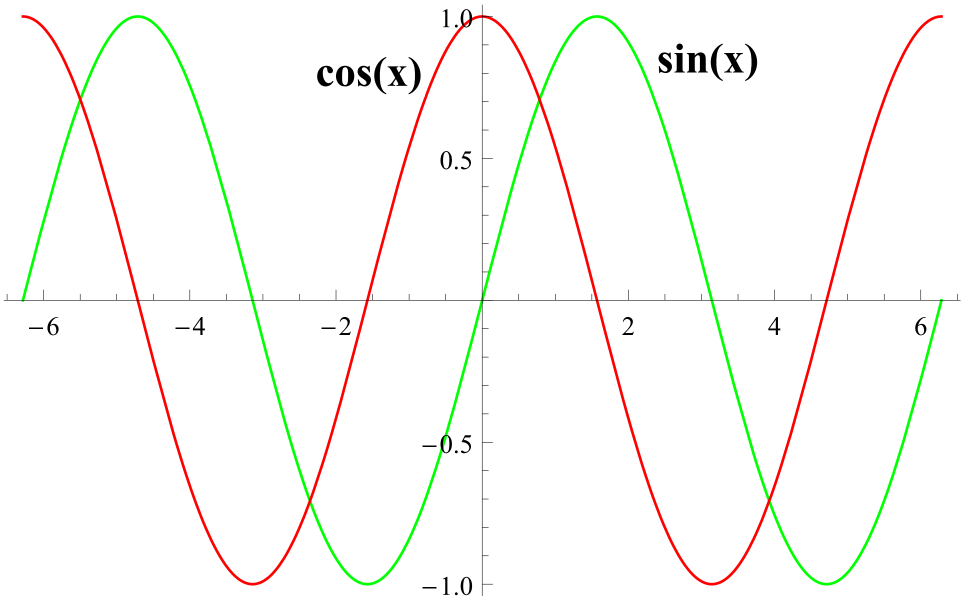
Invers funktion till e^x betecknas med $\ln x$ och kallas för **naturlig logaritm** av x. Eftersom $e > 1$ då är naturliga logaritmen en strängt växande funktion.

4. **Trigonometriska funktioner** De grundläggande trigonometriska funktionerna är $\sin x$ och $\cos x$. Definitionsmängden för båda dessa funktioner är $\mathbb{R}$ och värdemängden är intervallet $[-1, 1]$. Några väl bekanta egenskaper:

   (a) $\sin x$ och $\cos x$ är periodiska med perioden 2π;

   (b) $\sin(x) = -\sin(-x)$ och $\cos(x) = \cos(-x)$, d.v.s., $\sin x$ är en **udda** funktion medan $\cos x$ är **jämn**.

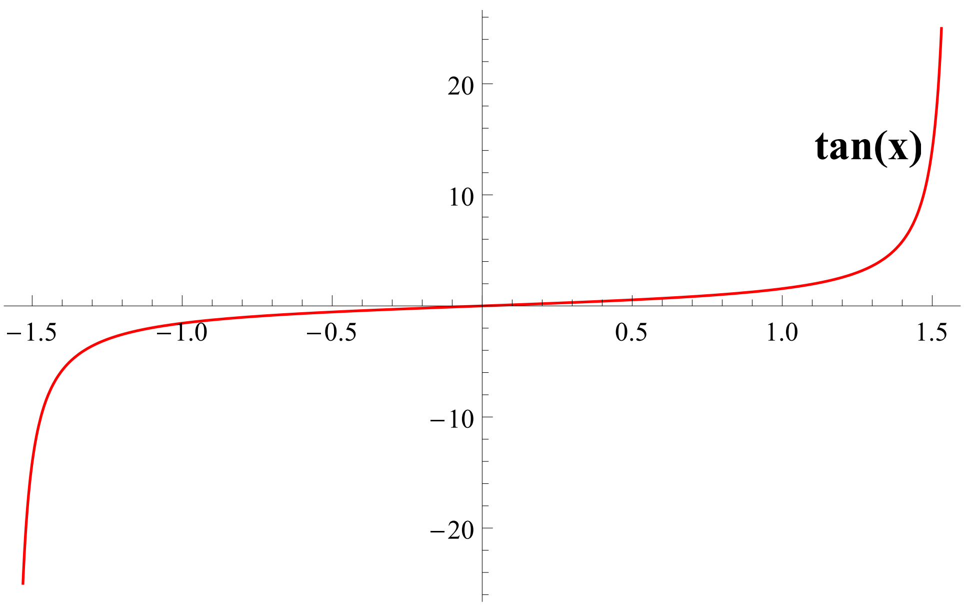
   (c) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (det finns flera identiteter mellan $\sin x$ och $\cos x$ som man skulle minnas, men det är ofta enklare att härleda dessa identiteter från definitionen av $\sin x$ och $\cos x$)



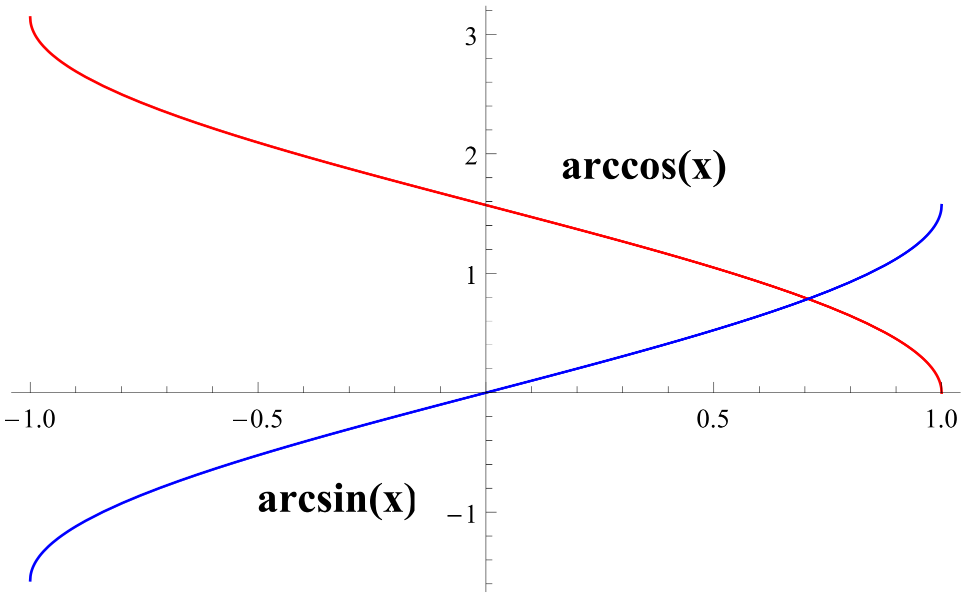
Vi har också

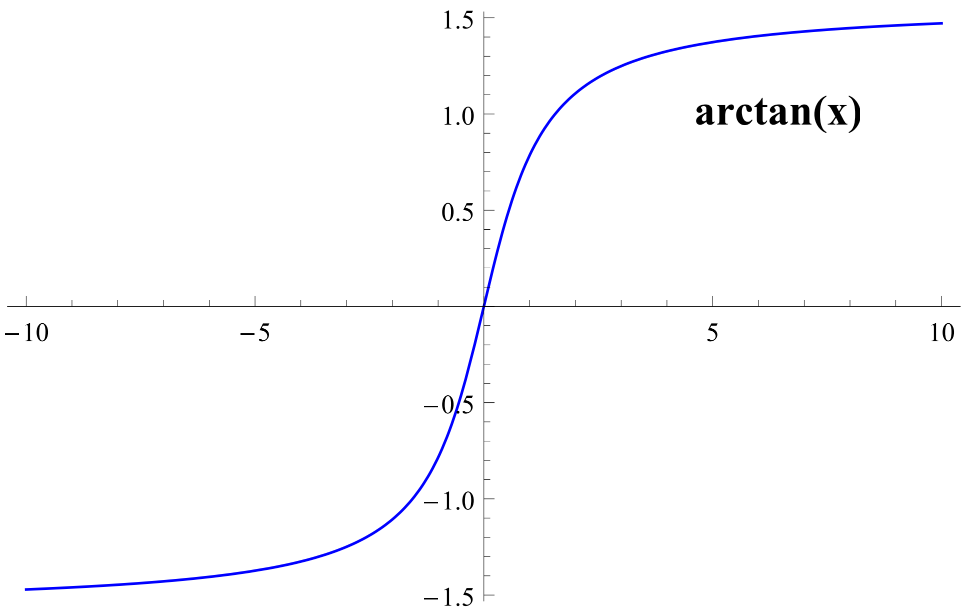
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \text{för } x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$$

$\tan x$ inte definieras i punkter då $\cos x = 0$.



Notera att $\sin x$ är injektiv i intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ och därmed $\sin x$ kan inverteras i detta intervall. Invers funktionen $\arcsin x$ definieras för $x \in [-1, 1]$. T. ex., $\arcsin(1) = \pi/2$ och $\arcsin(-1) = -\pi/2$. På liknande sätt är $\cos x$ injektiv i intervallet $[0, \pi]$ och dess invers i detta intervall betecknas med $\arccos x$. Vi har t. ex. $\arccos(1) = 0$ och $\arccos(-1) = \pi$. $\tan x$ är injektiv för $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ och inversfunktionen i detta intervall betecknas $\arctan x$.





5. **Hyperboliska funktioner**

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Uppgift: Rita grafen till hyperboliska funktioner. Vad är deras definitionsmängd? Var kan hyperboliska funktionerna invertera? Är de udda, jämna, etc? Skriva ner alla egenskaper av hyperboliska funktionerna som du kan härleda från graferna. Bevisa att $\sinh^2 x - \cosh^2 x = 1$.