Anteckningar för kursen "Analys i en Variabel"

Simone Calogero

Vecka 4

Viktig information. Dessa anteckningar är inte avsedda som en ersättning för kurs litteratur utan bara som en kort sammanfattning av föreläsningarna.

Innehåll

1 Definition av gränsvärde **1**

2 Räkneregler med gränsvärden **6**

3 Examples **7**

3.1 Polynom 7

3.2 Rationella funktioner 8

1 Definition av gränsvärde

Vi vill studera hur en funktion $f : D \to \mathbb{R}$ uppför sig när variabeln x närmar sig till ett givet reellt tal $a \in D$ eller när x närmar sig till ∞ (eller $-\infty$). I allmänhet skriver vi

$$\lim_{x\to a} f(x) = A,$$

och säger *limes av $f(x)$ när x går mot a är lika med A*, för att mena att $f(x)$ närmar sig till A då x närmar sig till a. Här kan a, A vara reella tal eller $\pm\infty$.

Till exempel är det tydligt från grafen av $f(x) = x^2$, att $f(x)$ blir godtyckligt stör när x blir större och större. Vi uttrycker detta beteende genom att skriva

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \tag{1}$$

Andra viktiga exempel som uppfattas från grafen:

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty \quad (\alpha > 0), \quad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

För en allmänna funktion f har vi följande definitionen av gränsvärdet (1):

Definition 1.1. *Låt $f : D \to \mathbb{R}$ vara en funktion och anta att $(a, \infty) \subseteq D$ för något reellt tal $a \in \mathbb{R}$. Vi säger att f divergerar mot ∞ då x går mot ∞ om för varje $C > 0$ finns det $\omega > a$ så att $x > \omega \Rightarrow f(x) > C$. I detta fall skriver vi*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \textit{(eller } f(x) \to \infty, \textit{ då } x \to \infty\textit{)}.$$

Anmärkningar.

1. Konstanten C i definitionen är ett godtyckligt reellt tal, som vi kan välja som stor som vi vill. Definitionen säger att oavsett hur stör är $C > 0$ ska $f(x)$ vara större än C om vi låter x bli tillräckligt stör. Till exempel, för $f(x) = x^2$ har vi $f(x) > C$ för $x > \sqrt{C}$, därför om vi sätter $\omega = \sqrt{C}$ får vi att $x > \omega \Rightarrow f(x) > C$ (rita figur). Det följer att
$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty.$$

2. Definitionsmängden av f måste innehålla ett intervall av formen (a, ∞) för att kunna definiera $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Till exempel får man inte definiera $\lim_{x\to\infty} \arcsin x$ eftersom funktionen $\arcsin x$ definieras endast för $x \in [-1, 1]$.

3. Ibland existerar gränsvärdet då $x \to \infty$ inte. Till exempel oscillerar $f(x) = \sin(x)$ mellan -1 och 1 när x varierar i $\mathbb{R}$ och därmed närmar sig $\sin(x)$ inte till något belopp då $x \to \pm\infty$. Därför
$$\lim_{x\to\pm\infty} \sin x \quad \text{existerar inte!}$$

4. Om $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ och det finns x_0 så att $g(x) > f(x)$ för $x > x_0$, då blir också $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, eftersom grafen av g ligger ovanför grafen av f för $x > x_0$ (rita bild). Till exempel, eftersom $x(1 + \sin^2 x) > x$ för $x > 0$ då är $\lim_{x\to\infty} x(1 + \sin^2 x) = \infty$.

På liknande sätt får man definiera vad betyder att f divergerar mot $-\infty$ när x går mot ∞, nämligen
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad (\text{eller } f(x) \to -\infty, \text{ då } x \to \infty)$$
om för varje $C > 0$ finns det $\omega > a$ så att $x > \omega \Rightarrow f(x) < -C$. Till exempel,

$$\lim_{x\to\infty} (-x^2) = -\infty$$

eftersom $x > \sqrt{C} \Rightarrow f(x) < -C$ (rita figur). Notera att $f(x) \to \infty$, då $x \to \infty$ om och endast om $-f(x) \to -\infty$, då $x \to \infty$.

På liknande sätt har vi

Definition 1.2. *Låt $f : D \to \mathbb{R}$ vara en funktion och anta att $(-\infty, a) \subseteq D$ för något reellt tal $a \in \mathbb{R}$. Då säger vi att*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad \text{(eller } f(x) \to \infty \text{ då } x \to -\infty\text{)}$$

om för varje $C > 0$ finns det $\omega < a$ så att $x < \omega \Rightarrow f(x) > C$. Vi säger att

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{(eller } f(x) \to -\infty \text{ då } x \to -\infty\text{)}$$

om för varje $C > 0$ finns det $\omega < a$ så att $x < \omega \Rightarrow f(x) < -C$.

Till exempel,

$$\lim_{x\to-\infty} |x| = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} (-x^2) = -\infty.$$

Att en funktion f har gränsvärdet $A \in \mathbb{R}$ då $x \to \infty$ (resp. $-\infty$) betyder att $f(x)$ närmar sig till A när $x \to \infty$ (resp. $-\infty$) och i detta fall ska vi skriva $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$). Till exempel är det klart från grafen av $f(x) = 1/x$ att $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$. Den formella definitionen av $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ är följande.

Definition 1.3. *Låt $f : D \to \mathbb{R}$ vara en funktion och anta att $(a, \infty) \subseteq D$ för något reellt tal $a \in \mathbb{R}$. Vi säger att f konvergerar till $A \in \mathbb{R}$ då x går mot ∞ om för varje $\varepsilon > 0$ finns det $\omega > a$ så att $x > \omega \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. I detta fall skriver vi*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad \text{(eller } f(x) \to A \text{ då } x \to \infty\text{).}$$

Föregående definitionen betyder att oavsett hur litet är ε kan man välja x tillräckligt stört så att avståndet $|f(x) - A|$ mellan $f(x)$ och A är mindre än ε, d.v.s.,

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

(rita figur). Med andra ord blir $f(x)$ närmare och närmare till A då x blir större och större. Till exempel,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

eftersom $1/x < \varepsilon$ för $x > 1/\varepsilon := \omega$. Nu visar vi att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1.$$

Vi har

$$\left|\frac{x+1}{x} - 1\right| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon, \quad \text{for } x > 1/\varepsilon$$

På liknande sätt kan man definiera vad som menas med

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A,$$

nämligen för varje $\varepsilon > 0$ finns ω so att $x < \omega \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Andra viktiga exempel

$$\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Nu definierar vi gränsvärdet av en funktion då x närmar sig till ett visst reellt tal $a \in D$, d.v.s.,

$$\lim_{x\to a} f(x).$$

Vi antar först att a är en **inre punkt** till definitionsmängden D av f, d.v.s., det finns ett öppet intervall I så att $a \in I$ och $I \subseteq D$ (rita figur). Då får man närmar sig till a från vänster eller från höger, d.v.s., man kan räkna ut $f(x)$ för $x < a$ med x närmare och närmare till a eller man kan räkna $f(x)$ för $x > a$ med x närmare och närmare till a.

Definition 1.4. *Låt $f : D \to \mathbb{R}$ och $a \in D$ en inre punkt i definitionsmängden. Vi säger att f har* **högergränsvärdet** *A då x går mot a om för varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ så att $(a, a+\delta) \subset D$ och*

$$a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

I detta fall skriver vi

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = A \quad (\textit{eller } f(x) \to A, \textit{ då } x \to a^+)$$

Vi säger att f har **vänstergränsvärdet** *B då x går mot a om för varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ så att $(a-\delta, a) \subset D$ och*

$$a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon.$$

I detta fall skriver vi

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = B \quad (\textit{eller } f(x) \to A, \textit{ då } x \to a^-).$$

Om båda höger och vänstergränsvärden existerar och är lika, d.v.s., $A = B$, då säger vi att f konvergerar till A då x går mot a och skriver

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad (\textit{eller } f(x) \to A, \textit{ då } x \to a).$$

Exempel

1. $f(x) = \sin x$. Då är

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x = \lim_{x\to 0^-} \sin x = 0.$$

   Därför $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$.

2. Låt

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } x \geq 1 \\ (x-2)^2 & \text{då } -1 \leq x < 1 \\ x & \text{då } x < -1 \end{cases}$$

Då har vi

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = 9, \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = -1.$$

Alltså

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1,$$

men $\lim_{x\to -1} f(x)$ existerar inte.

Nu diskuterar vi ett exempel då a inte är en inre punkt. Den vanligaste situationen är när definitionsmängden av f ges av ett intervall och a är en ändpunkt till intervallet. Till exempel definieras $f(x) = \arcsin x$ endast för $x \in [-1, 1]$. I detta fall har vi

$$\lim_{x\to -1^+} \arcsin x = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to 1^-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

men vi får inte definiera $\lim_{x\to 1^+} \arcsin x$, eftersom $\arcsin x$ kan inte räknas ut för $x > 1$. På liknande sätt får man inte definiera $\lim_{x\to -1^-} \arcsin x$.

De sista fallen som vi diskuterar är hur man definierar

$$(i)\ \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty, \quad (ii)\ \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty, \quad (iii)\ \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty, \quad (iv)\ \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

Vi definierar bara (1); att skriva ner de andra definitionerna lämnas som uppgift.

Definition 1.5. *Låt $f : D \to \mathbb{R}$ så att $(a, b) \subseteq D$ för några reella tal $b > a$. Vi säger att f har högergränsvärdet ∞ då x går mot a om för varje $C > 0$ finns $\delta > 0$ så att*

$$a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) > C.$$

I detta fall skriver vi

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \quad \textit{(eller } f(x) \to \infty, \textit{ då } x \to a^+\textit{)}$$

Till exempel

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Eftersom höger och vänstergränsvärdena är olika får man inte definiera $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$. Däremot

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{|x|} = \infty$$

och därmed $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$. Andra exempel:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \infty, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = -\infty.$$

2 Räkneregler med gränsvärden

Vi presenterar utan bevis en lista av regler som används för att bestämma gränsvärden. I denna list står $\lim f(x)$ för gränsvärdet av $f(x)$ då x går mot ett reellt tal a eller mot $\pm\infty$ (reglerna gäller i alla fall).

1. Om $\lim f(x) = A \in \mathbb{R}$ och $\lim g(x) = B \in \mathbb{R}$ då är

$$\lim(f(x) + g(x)) = A + B.$$

   Om $A = B = \infty$ (resp. $A = B = -\infty$) då är

$$\lim(f(x) + g(x)) = \infty, \quad \text{resp.} \quad \lim(f(x) + g(x)) = -\infty$$

   Till exempel:

$$\lim_{x\to 0}(x+1+\sin x) = 0+1+0 = 1; \quad \lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x}+\cos x) = \infty+1 = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} e^x+\ln x = \infty+\infty = \infty.$$

   Viktig: Uttrycket $\infty - \infty$ är **obestämt**! I detta fall behöver man studera gränsvärdet noggrannare (se exempel nedan).

2. Om $\lim f(x) = A \in \mathbb{R}$ och $\lim g(x) = B \in \mathbb{R}$ då är

$$\lim f(x)g(x) = AB.$$

   Om A, B är $\pm\infty$ då gäller det att

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad -\infty \cdot \infty = \infty \cdot (-\infty) = -\infty, \quad -\infty \cdot (-\infty) = \infty$$

   Om $A = \pm\infty$ $B \neq 0$ så gäller

$$\infty \cdot B = \infty \text{ om } B > 0\ , \ \infty \cdot B = -\infty \text{ om } B < 0$$

$$-\infty \cdot B = -\infty \text{ om } B > 0\ , \ -\infty \cdot B = \infty \text{ om } B < 0$$

   Till exempel,

$$\lim_{x\to 0^+}(\ln x)\frac{1}{x} = -\infty \cdot \infty = -\infty, \quad \lim_{x\to 0} e^x \cos x = 1 \cdot 1 = 1, \quad \lim_{x\to\infty} \ln x \frac{x}{1+x} = \infty \cdot 1 = \infty$$

   Viktig: Uttrycket $\infty \cdot 0$ är **obestämt**! I detta fall behöver man studera gränsvärdet noggrannare (se exempel nedan).

3. Om $\lim f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim g(x) = B \in \mathbb{R}$ och $B \neq 0$ då gäller

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Dessutom

$$\frac{0}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{\pm\infty}{0} = \pm\infty$$

Till exempel

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x}{\ln(1+x)} = \frac{e}{\ln 2}, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \infty, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

Viktig: Uttrycken $\frac{0}{0}$ och $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ är obestämt.

4. Om $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ och

$$\lim f(x) = \lim h(x) = A$$

då gäller också att

$$\lim g(x) = A.$$

Exempel:

$$x \leq x(1+\sin^2(x)) \leq 2x$$

och därmed

$$\lim_{x\to\infty} x(1+\sin^2 x) = \infty.$$

5. (Variabels substitution) Om $\lim g(x) = A$ (eller $\pm\infty$) och $\lim f(g(x))$ existerar då är

$$\lim f(g(x)) = \lim_{y\to A} f(y)$$

Exempel:

$$\lim_{x\to-\infty} \sin(e^x) = \lim_{y\to 0} \sin y = 0.$$

3 Examples

3.1 Polynom

Låt $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ vara ett polynom med grad $n > 1$. Då har vi

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0), \quad \text{för alla } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Till exempel,

$$\lim_{x\to 1} x^2 + 3x - 4 = 1^2 + 3(1) - 4 = 0$$

Gränsvärden av $p(x)$ när $x \to \pm\infty$ beror på tecknet av a_n och på om n är udda eller jämn enligt följande reglerna:

1. Om $a_n > 0$ då $p(x) \to \infty$ när $x \to \infty$; om $a_n < 0$ då $p(x) \to -\infty$ när $x \to \infty$. Exempel:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 - x = \infty; \quad \lim_{x\to\infty} -x^2 + 3x + 1 = -\infty$$

   Notera att i första exemplet divergerar båda termer x^2 och x till ∞ då $x \to \infty$ och därmed deras summa har obestämd formen "$\infty - \infty$" . För att bestämma gränsvärdet i detta fall använder vi att

$$x^2 - x = x^2(1 - \frac{1}{x}).$$

   Eftersom $1 - 1/x \to 1$ då $x \to \infty$ då har vi

$$\lim_{x\to\infty} x^2 - x = \lim_{x\to\infty} x^2(1 - \frac{1}{x}) = \infty \cdot 1 = \infty.$$

2. Om n är jämn då gäller att

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \infty, \text{ om } a_n > 0 \text{ och } \lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty, \text{ om } a_n < 0.$$

   Om n är udda då gäller att

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty, \text{ om } a_n > 0 \text{ och } \lim_{x\to-\infty} p(x) = \infty, \text{ om } a_n < 0.$$

   Till exempel

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 - x^2 + 3x = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x^6 + 6x^3 - 12 = \infty$$

   etc.

3.2 Rationella funktioner

Låt $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ vara ett polynom med grad $n > 1$ och $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ vara ett polynom med grad $m > 1$. Betrakta rationella funktionen

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Notera att en rationell funktion får alltid definieras på mängder av formen $(-\infty, a]$ och $[b, \infty)$ (varför?). Därför kan vi studera gränsvärdet av f då $x \to \pm\infty$. Vi har

Sats 3.1. *Det gäller att*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

Exempel:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^6 - 5x^2 + x}{x^{10}+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^6}{x^{10}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x^4} = 0.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^5 + x^3 - 1}{-6x^5 + x^4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^5}{-6x^5} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^6 - 5x^2 + x}{3x^3 + x^2 - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^6}{3x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^3}{3} = -\infty$$

Om x_0 tillhör definitionsmängden av $f(x)$ då har vi $f(x) \to f(x_0)$ när $x \to x_0$. Till exempel

$$\lim_{x\to-1} \frac{4x^6 - 5x^2 + x}{3x^3 + x^2 - 1} = \frac{4-5-1}{-3+1-1} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}.$$