Anteckningar för kursen "Analys i en Variabel"

Simone Calogero

Vecka 5

Viktig information. Dessa anteckningar är inte avsedda som en ersättning för kurs litteratur utan bara som en kort sammanfattning av föreläsningarna.

Innehåll

1 Standardgränsvärden

Vi presenterar utan bevis en lista av standard gränsvärden som involverar elementära funktioner:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0, \qquad (\text{obestämd form: } \frac{\infty}{\infty})\\
&(2) \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0, \quad \text{för } \alpha>0 \qquad (\text{obestämd form: } \frac{\infty}{\infty})\\
&(3) \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (\text{obestämd form: } \frac{0}{0})\\
&(4) \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad (\text{obestämd form: } \frac{0}{0})\\
&(5) \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e. \qquad (\text{obestämd form: } 1^\infty)
\end{aligned}
$$

Anmärkningar. Alla gränsvärden (1)-(5) har obestämd form. Den geometriska tolkningen av (1) är att funktionen e^x divergerar mot ∞ då $x\to\infty$ snabbare än x^α; på liknande sätt innebär (2) att x^α ($\alpha > 0$) divergerar snabbare än $\ln x$ då $x \to \infty$. Gränsvärdet (3) betyder att $\sin x$ konvergerar mot 0 då $x \to 0$ lika snabbt som x. Gränsvärdet (4) har en liknande tolkning. Gränsvärdet (5) kan användas för att definiera talet e.

I flera fall kan gränsvärden med obestämd form reduceras till ett i lista (1)-(5) genom **variabelsubstitution**.

Exempel

1. Beräkna
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x}.$$
Vi omskriver gränsvärdet som
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{e^{3x}-1}{3x} = 3\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{3x}$$
Sätt $y = 3x$; då $x \to 0$ är ekvivalent med $y \to 0$. Därför
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = 3\lim_{y\to 0} \frac{e^{y}-1}{y} = 3$$

2. Beräkna
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{7x}.$$
Låt $x = e^y - 1$. Då $x \to 0$ är ekvivalent med $y \to 0$. Därför
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{7x} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+(e^y-1))}{7(e^y-1)} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln e^y}{7(e^y-1)} = \frac{1}{7}\lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y-1} = \frac{1}{7}.$$

3. Beräkna
$$\lim_{x\to 0^+} 2x\ln(5x)$$
Låt $x = 1/y$. Då $x \to 0^+$ är ekvivalent med $y \to +\infty$, därmed
$$\lim_{x\to 0^+} 2x\ln(5x) = \lim_{y\to\infty} \frac{2}{y}\ln\frac{5}{y} = \lim_{y\to\infty} \frac{2}{y}(\ln 5 - \ln y) = \lim_{y\to\infty} \frac{2\ln 5}{y} - 2\lim_{y\to\infty} \frac{\ln y}{y} = 0.$$

4. Beräkna
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin(3x)}$$
Vi skriver
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\frac{x}{\sin(3x)}.$$

Vi har $\frac{\sin x}{x} \to 1$ då $x \to 0$ och

$$\frac{x}{\sin(3x)} = \frac{1}{3}\frac{3x}{\sin(3x)} \to \frac{1}{3}, \text{ då } x \to 0$$

Därför

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin(3x)} = \frac{1}{3}$$

5. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$$

Vi skriver

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^2 = e^2$$

2 Asymptoter

Definition 2.1. *Låt $f : D \to \mathbb{R}$ vara en funktion så att $(a, \infty) \subset D$, för något reellt tal $a \in \mathbb{R}$. En rät linje $y = kx + m$ kallas* **asymptot** *till f då $x \to \infty$ om*

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx + m)] = 0.$$

I detta fall skriver vi $f(x) \sim kx + m$ då $x \to \infty$. På liknande sätt definieras vad som menas med asymptot av en funktion då $x \to -\infty$.

Därför om $y = kx + m$ är en asymptot till f då $x \to \infty$, så blir grafen av f närmare och närmare till grafen av räta linjen $y = kx + m$ då x blir större och större (rita figur)

Exempel.

1. $f(x) = \frac{3x^3+4x+1}{4x^2+x+8}$. Då är

$$\begin{aligned} f(x) - (kx + m) &= \frac{(3 - 4k)x^3 - (k + 4m)x^2 + 4x + 1 - mx - 8(kx + m)}{4x^2 + x + 8} \\ &= \frac{(3 - 4k)x^3 - (k + 4m)x^2}{4x^2 + x + 8} + \frac{4x + 1 - mx - 8(kx + m)}{4x^2 + x + 8} \end{aligned}$$

Den andra term är en kvot mellan ett första grad polynom (i täljaren) och ett andra grad polynom (i nämnaren) och därmed andra termen konvergerar till noll då $x \to \infty$. Den första termen konvergerar mot noll om och endast om $3 - 4k = 0$ och $k + 4m = 0$, d.v.s., $k = 3/4$ och $m = -3/16$. Därför är $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{16}$ asymptot till f då $x \to \infty$, d.v.s., $f(x) \sim \frac{3}{4}x - \frac{3}{16}$ då $x \to \infty$.

2. $f(x) = 3 + x^2 \sin(1/x)$. Eftersom

$$x^2 \sin(\frac{1}{x}) = x \frac{\sin(1/x)}{(1/x)}$$

och $1/x \to 0^+$ då $x \to \infty$ då har vi

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3 + \lim_{x\to\infty} x \frac{\sin(1/x)}{(1/x)} = \lim_{x\to\infty} 3 + x$$

Därmed $f(x) \sim 3 + x$ då $x \to \infty$.

3 Kontinuerliga funktion

Definition 3.1. *En funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sägs vara* **kontinuerlig** *i x_0 om $x_0 \in D$ och*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{1}$$

Om f är kontinuerlig i varje punkt i sin definitionsmängd kallas den kontinuerlig.

Anmärkning: om x_0 är en inre punkt i D är gränsvärdet i (1) lika med både höger och vänstergränsvärdet (om dessa två gränsvärden inte är lika med varandra då är limes i (1) inte ens definierad). Om x_0 inte är en inre punkt i D då står limes i (1) för höger eller vänstergränsvärdet, beroende på vilket kan definieras. Till exempel betrakta funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{vid } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{då } x > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Då är $f(x)$ kontinuerlig för $x > 0$ men

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0) = 2.$$

Alltså är f inte kontinuerlig i $x = 0$.

Anmärkning. För att f vara kontinuerlig i x_0 måste f vara definierad i x_0. Till exempel definieras stegfunktion

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } x > 0 \\ 0 & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

inte i $x = 0$ och därför man kan inte säga att H är kontinuerlig eller ej i $x = 0$. Däremot är det klart att man kan inte ange ett värde för H i $x = 0$ så att funktionen blir kontinuerlig.

Alla elementära funktioner (utom H) diskuterades hittills är kontinuerliga. Dessutom om f, g är kontinuerliga så är även

$$f + g, \quad fg, \quad \frac{f}{g}, \quad f \circ g$$

kontinuerliga i respektive definitionsmängder. I själva verket, för att definiera en diskontinuerlig funktion, brukar man ange två olika funktionsregler på två olika mängder, som visades i exempel (2) ovan.

Om f inte är kontinuerlig i $x_0 \in D$ då säger man att f är **diskontinuerlig** i x_0. Detta betyder att åtminstone ett av höger/vänstergränsvärden av f då $x \to x_0$ är inte lika med $f(x_0)$. Om f är diskontinuerlig i x_0 då gör grafen av f ett hopp vid $x = x_0$ (rita figur)

Två viktiga egenskaper av kontinuerliga funktioner är följande:

1. Om en funktion f är definierad och kontinuerlig i ett intervall $[a, b]$ och $f(a) \neq f(b)$ då antar f varje värde mellan $f(a)$ och $f(b)$. (Rita figur)

2. Om funktionen f är kontinuerlig på slutet intervallet $[a, b]$ så har f ett största och ett minsta funktionsvärde på detta intervall, d.v.s., det finns $x_0, x_1 \in [a, b]$ så att
$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

Exempel på tillämpning av 1. Visa att funktionen
$$f(x) = 1/2 - 50x^2 - e^{2x} \cos x$$
har en rot i intervallet $[0, \pi]$ (d.v.s., finns $x_0 \in [0, 1]$ så att $f(x_0) = 0$). Lösningen: $f(0) = 1/2 - 1 = -1/2 < 0$ och $f(\pi) = 1/2 - 50\pi^2 + e^{2\pi} \approx 42.5 > 0$. Eftersom f är kontinuerlig då, enligt 1, måste f antar alla värden mellan $f(0)$ och $f(\pi)$ och därmed måste det finna $x_0 \in [0, \pi]$ så att $f(x_0) = 0$.

Uppgift 3.1. *Låt*
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & om\ x > 1 \\ ax + b & om\ 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\sin^2(x)}{3x} & om\ x < 0 \end{cases}$$
Bestäm konstanterna a, b så att f blir kontinuerlig.

Lösning: Vi omskriver funktioner f för $x > 1$ som
$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1$$
och därmed
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3.$$
Eftersom $\lim_{x \to 1^-} f(x) = a + b$, då kräver kontinuiteten av f i $x = 1$ att
$$a + b = 3. \tag{3}$$
Dessutom
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin^2(x)}{3x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{3} \frac{\sin(x)}{x} = 0,$$
då vi använde att $(\sin x)/x \to 1$ och $(\sin x)/3 \to 0$ då $x \to 0$. Eftersom $\lim_{x \to 0^+} f(x) = b$, då kräver kontinuiteten av f i $x = 0$ att $b = 0$. Därför, från (3), $a = 3$.