Anteckningar för kursen "Analys i en Variabel"

Simone Calogero

Vecka 6

Viktig information. Dessa anteckningar är inte avsedda som en ersättning för kurs litteratur utan bara som en kort sammanfattning av föreläsningarna.

Innehåll

1 Definition av derivata

Definition 1.1. *Låt $f : D \to \mathbb{R}$ och x_0 en inre punkt (d.v.s., finns ett öppet intervall I så att $x_0 \in I$ och $I \subseteq D$). Om gränsvärdet*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existerar så sägs f vara **deriverbar** *i punkten x_0. Gränsvärdet ovan betecknas med $f'(x_0)$, eller $\frac{df}{dx}(x_0)$, och kallas* **derivata** *av f i x_0.*

Anmärkningar

1. Kvoten
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0}$$
kallas för finit differens av f mellan x_0 och x_0+h. f är deriverbar i $x = x_0$ om finita differensen av f mellan x_0 och x_0+h konvergerar då $h \to 0$ (rita figur). Notera att h kan vara positiv eller negativ.

2. Existensen av gränsvärdet i definitionen innebär att gränsvärdena

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existerar och är lika. Det första gränsvärdet definierar den så kallas **högerderivatan** av f i x_0 och den andra den **vänsterderivatan**.

3. Om x_0 inte är en inre punkt i definitionsmängd då kan derivatan av f inte definieras. Till exempel om $D = [a, b]$ då är derivatan av f i $x = a$ och $x = b$ inte definierad fast man kan definiera högerderivatan i $x = a$ och vänsterderivatan i $x = b$.

Exempel. $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ges av

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & -1 \leq x < 0 \\ x + 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

är kontinuerlig i hela sin definitionsmängd men den är deriverbar endast i $[-1, 0) \cup (0, 1]$. I själva verket ges högerderivatan av f i $x_0 = 0$ av

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{0 + h + 1 - 1}{h} = 1$$

med vänsterderivatan ges av

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{0 + 2h + 1 - 1}{h} = 2$$

Eftersom vänster och höger derivatorna är inte like då är f inte deriverbar i $x_0 = 0$.

En funktion sägs vara **deriverbar** om den är deriverbar i alla punkter i sin definitionsmängd.

1.1 Några viktiga egenskaper av deriverbara funktioner

Notera att

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

kan omskrivas

$$f(x_0 + h) - (f(x_0) + f'(x_0)h) \to 0, \quad \text{då } h \to 0.$$

Det följer att ju mindre är h desto mer $f(x_0 + h)$ liknar $f(x_0) + f'(x_0)h$, d.v.s.,

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h, \quad h \text{ lite}$$

Exempel.

$$\sqrt{1.001} = \sqrt{1 + 0.001}$$

Låt $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$ och $h = 0.001$. Då är

$$\sqrt{1.001} = f(1 + 0.001) \approx f(1) + f'(1)0.001$$

Eftersom $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ då är $f'(1) = 1/2$ och därmed

$$\sqrt{1.001} \approx 1 + \frac{1}{2000} = 1.0005$$

Geometrisk tolkning. Anta att x_0 och h är givna reella tal och betrakta räta linjen

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$

som passar genom punkterna $(x_0, f(x_0))$, $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Då $h \to 0$ blir denna räta linje tangentlinjen till grafen av f i $x = x_0$ (rita figur). Då ser vi att räta linjen

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

definierar precis tangentlinjen till grafen av f i $x = x_0$; $f'(x_0)$ är riktning koefficient.

Sats 1.1. *Om en funktion är deriverbar i x_0 då är den kontinuerlig i x_0*

BEVIS: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \to 0} f(x_0) + f'(x_0)h = f(x_0)$.

Följande tabellen visar derivata funktion för några viktiga funktioner.

Funktion	**Derivata**
konstant	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$
arcsin$x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
arccos$x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
arctan$x$	$1/(1+x^2)$

Några bevis:

1. $(e^x)' = e^x$

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h} \to e^x, \text{ då } h \to 0.$$

2. $(\ln x)' = 1/x$

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{h}\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{x}\frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h/x} = \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{h/x} \to \frac{1}{x}, \quad \text{då } h \to 0.$$

3. $(\sin x)' = \cos x$. Vi använder formel

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Därmed

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \frac{\sin x(1 - \cos h)}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}$$

Eftersom $\frac{\sin h}{h} \to 1$ då $h \to 0$ och

$$\frac{1 - \cos h}{h} = \frac{1 - \cos^2 h}{h(1 + \cos h)} = \frac{\sin^2 h}{h(1 + \cos h)} = \frac{\sin h}{h}\frac{\sin h}{1 + \cos h} \to 1 \cdot 0 = 0,$$

då har vi

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

1.2 Derivationsregler

Låt f och g vara deriverbara funktioner. Då gäller att

1. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$. **Exempel.** $(\sin x + \cos x)' = \cos x - \sin x$.

2. Leibniz regel: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. **Exempel.** $(x^3 \ln x)' = 3x^2 \ln x + x^2$. Notera också att $(\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$ för alla reella tal α.

3. Kedjeregel: Om $u(x) = f(g(x))$ då är

$$u'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Exempel. Låt $u(x) = \sin(\ln x)$. Då är $u(x) = f(g(x))$, med $f(x) = \sin x$ och $g(x) = \ln x$. Eftersom $f'(x) = \cos x$ och $g'(x) = 1/x$ då är

$$u'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}.$$

Genom att använda Leibniz och kedjeregel bevisar vi nu att

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

I själva verket, enligt Leibniz regel,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$$

Därför $1/g(x)^2$ är sammansättning av $1/x$ med $g(x)$ då är, enligt kedjeregel,

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{1}{g(x)^2}g'(x)$$

Alltså

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x)^2}g'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Exempel.

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{(\cos x)x + \sin x}{x^2}.$$

Slutligen bevisar vi formeln för derivata av invers funktion.

Sats 1.2. *Anta att funktionen f har en invers funktion som är kontinuerlig. Om f är deriverbar i en punkt x och $f'(x) \neq 0$ så är f^{-1} deriverbar i punkten $y = f(x)$ och*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

BEVIS: Från definitionen av invers funktion har vi

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

Därmed

$$\frac{d}{dx}f(f^{-1}(x)) = 1.$$

Genom att använda kedjeregeln får vi

$$\frac{d}{dx}f(f^{-1}(x)) = f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x)$$

Därför

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Påståendet följer genom att ersätta x med $y = f(x)$.

Uppgift 1.1. *Beräkna* $g'(1)$ *där* g *är inversen till funktionen* $f(x) = 1 + 2x + x^7$

Lösning. Notera att f *är injektiv för* $x \in \mathbb{R}$. *Det gäller* $g'(1) = 1/f'(x_0)$, *då* x_0 *är det unika reella talet så att* $f(x_0) = 1$, *d.v.s.,* $x_0 = 0$. *Alltså* $g'(1) = 1/f'(0) = 1/2$.

Uppgift 1.2. *Bestäm den största möjliga definitionsmängd av* $f(x) = \ln^2(\sin^2(x))$ *och beräkna* $f'(x)$.

Lösning: I definitionsmängden av f *måste* $\sin^2(x) > 0$ *gälla. Eftersom* $\sin^2(x) \geq 0$ *och* $\sin^2(x) = 0$ *om och endast om* $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ *då är största möjliga definitionsmängden av* f *lika med mängden* $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$. *För* $x \in D$ *ges* f' *av*

$$f'(x) = 2\ln(\sin^2(x))\frac{1}{\sin^2(x)}2\sin x \cos x = 4\ln(\sin^2(x))\frac{\cos x}{\sin x}.$$